روزا پتر

بازی با بینهایت

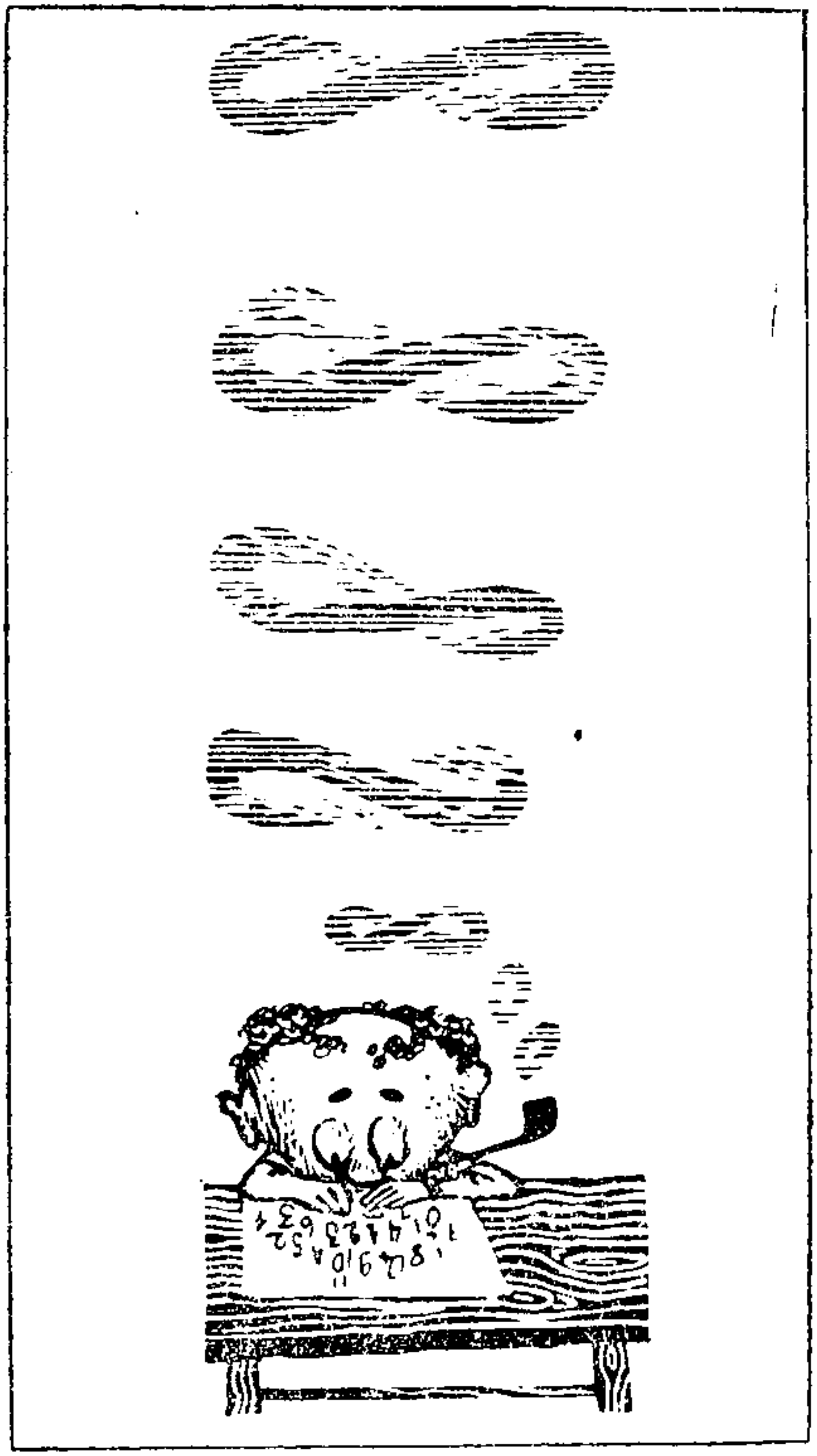
ترجمهٔ پرویز شهریاری

بازی با بینهایت
ИГРА С БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ
روزا پتر
Петер Роза
ترجمهٔ پرویز شهریاری
انتشارات توکا
چاپ در چاپخانهٔ رامین
چاپ اول در ۳۳۰۰ نسخه ــ فروردین ۲۵۳۶
شمارهٔ ثبت کتابخانهٔ ملی: ۱۸۹۲ــ۲۵۳۵/۱۲/۲۵

اگرکسی باشدکه‌ریاضیات را، دانشی دست‌نیافتنی ویا ملال آور بداند، باخواندن کتاب «بازی با بینهایت» تمامی پردهٔ پندار نادرستش فرو می‌ریزد و همانطور که صفحه‌های کتاب راپشت سرمی‌گذارد، گام‌به‌گام به‌ساختمان پرشکوه وزیبای ریاضیات نزدیك می‌شود، لذت دست یافتن به‌ناشناخته‌ها را احساس می‌کند ومی‌پذیرد که‌ریاضیات،ضمن‌اینکه فرمانروای مطلق همه دانشهاست، هنری بزرگ هم به شمار می‌رود.

«بازی بابینهایت»درعین حال ، برای آنهایی هم که ریاضیات را دوست دارند وباآن زندگی می‌کنند، پرفایده است وچیزها می‌آموزد و به‌ویژه، برای دبیران ریاضی، که درجستجوی راههای تازه وساده‌ای برای قانع‌کردن دانش آموزان هستند، کتابی نمونه به‌شمار می‌رود.

بازی‌با بینهایت ازساده‌ترین‌مفهوم ریاضی، یعنی‌شمار، آغاز می‌کند ، از همهٔ راههای پرپیچ وخمی که با دست پیشینیان ماگشوده شده‌است می‌گذرد وخود را به‌قلهٔدانش امروزی بشر می‌رساند، جایی که‌دیگر ادامهٔآن شناخته‌نیست و بزرگترین ریاضیدانان امروز با دشواریهای آن دست و پنجه نرم می‌کنند.



روزا پتر

بازی با بینهایت

ترجمهٔ پرویز شهریاری

در این کتاب

ازمقدمهٔ نویسنده

من این‌کتاب را بیشتر برای‌آن‌گروه از صاحبان فرهنگ نوشته‌ام که‌ریاضیات، کاراختصاصی‌آنهانیست، مثل‌نویسندگان، هنرمندان وکسانی که با علوم انسانی‌سر وکار دارند . اینها، دروازهٔ زیباییها را به روی من‌گشوده‌اند،ومن به‌پاس آن،می‌خواهم درهای ریاضیات رابه‌روی آنها بازکنم . من‌می‌خواهم به‌آنهانشان دهم،برخلاف‌آنچه‌که‌آنها می‌گویند ومی‌اندیشند، ما با دیگران تفاوتی نداریم. من ریاضیات را دوست دارم، نه تنها به‌این‌خاطر که پایهٔ صنعت ما برآن‌گذاشته شده‌است،بلکه ضمناً به این خاطر که بسیار زیباست، به این خاطر ، که اگر آدمی بخواهد، می‌تواند عشق به بازی را درآن بیابد، به‌این خاطر که درمحتوی‌ریاضیات، چنان بازیهای سحرگونه‌ای‌وجود دارد که آدمی می‌تواند به‌یاری آنها، حتی به«نامتناهی»دست یابد. ریاضیات ،آگاهیهای روشنی دربارهٔ بینهایت به‌مامی‌دهد و دربارهٔ چیزهایی گفتگو می‌کندکه به دشواری می‌توان ، به اندیشه‌آورد. ریاضیات، در عین حال، به‌طور شگفت‌انگیزی ، انسانی است وکمتر از هرجای دیگری، ضرب‌المثل «دودوتا، چهارتاست» درمورد آن صدق می‌کند: ریاضیات، همیشه‌وهمه جا بلندگوی این شعاراست که فعالیت واستعداد آدمی، پایان ناپذیر است.

قابل فهم بودن کتاب، به معنای سطحی‌بودن آن‌نیست من تلاش کرده‌ام ، مفهومها را باروشنی کامل بیان کنم. من اطمینان دارم که طرح مفهومها به این ترتیب ، حتی برای ریاضیدانان، وبدون‌تردید برای دبیران،بیفایده‌نباشد. من‌تلاش

کرده‌ام که‌تنها به‌آنچه‌که خیلی‌خسته‌کننده‌نباشد و به‌موضوعهایی که بیشتر عینی است، بپردازم واز بـررسیهای فنی تفصیلی بگذرم (هدف من در این کتاب ، این نبوده‌است که خواننده رابا روشها ودستورهای خاص ریاضی‌آشنا کنم) . اگر این کتاب بدست دانش‌آموز یا دانشجویی بیفتد ، به این نکته (که من خیلی به‌آن علاقه‌مندم)پی‌خواهدبرد کـه ریاضیات، دانشی به هم پیوسته است وهدف‌واحدی‌را دنبال می‌کند. درابتدا،تصور کاملی از موضوع نداشتم، آنچه را که یادداشت کرده‌بودم ، به‌غایت زیاد بود، بعد، به‌نظرم رسید ، آنچه را که مربوط به موضوعهای جزیی واختصاصی است، حذف‌کنم. واگر راهی‌را که درابتدا انتخاب‌کرده بودم، طولانی بود، مثل چیزکهنه‌ای که روبه‌روی ماباشد، گردوخاك را ازآن می‌زدودم وبه‌تدریج به‌آنچه که مورد نظرم بود، می‌رسیدم.

باوجودی‌که من این سرزنش را می‌پذیرم که‌لحن‌کتاب تا جایی، وموقتاً، ساده‌لوحانه است، ولی، باید بـه یـاد داشته باشیم‌که رابطه‌های ساده‌لوحانه‌مربوط به حقایق ساده، همیشه باکشفهای تازه، بستگی ناگسستنی دارند.

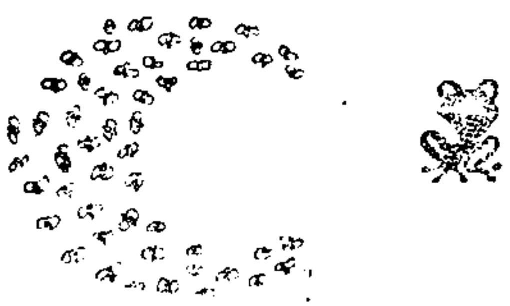
ورود به مطلب

من اغلب، گفتگو با یکی از دوستان نویسنده‌ام را به خاطرمی‌آورم. او همیشه ازاین‌بابت که‌مردی کاملاً تحصیل‌کرده‌نیست، غصه می‌خورد. این احساس کمبود، حتی درکار نویسندگی روزانهٔ او هم، اثرمی‌گذاشت. او، به عنوان‌نمونه، ازمفهومهای ریاضی، ومثلاً دستگاه مختصات، نام‌می‌برد، که وقتی در پشت نیمکتهای مدرسه نشسته‌بود، ازآنها صحبت می‌شد. واین دوست من معتقد بود که ریاضیات برای او، به عنوان یك نویسنده، بسیار لازم‌است وباناراحتی می‌گفت که متأسفانه، او ازاین سرچشمهٔ پربار، محروم است. ازطرف دیگر، این شکایتها به نظرش بیفایده می‌آمد، زیرا گمان می‌کرد که استعداد اینرا ندارد که سرگرم‌آموختن پیچیدگیهای ریاضیات‌بشود. خاطرهٔ این گفتگو، آرامش مراگرفت، مرا به‌فکر واداشت وتشویق کرد تا طرحی تهیه کنم: از همان آغازکار، برای من روشن‌بودکه در اینجا، دامنهٔ فعالیت، خیلی وسیع است: عنصر احساس برای من در ریاضیات، نقش تعیین کننده دارد، ومگر نویسندگان وهنرمندان، ازهمین‌سرچشمه سیراب‌نمی‌شوند؟ خاطره‌ای از سالهای دانشجویی خود را تعریف کنم. باگروهی ازدوستان دانشگاهیم، به دیدن نمایشنامه‌ای از برنارد شاو رفته‌بودم. در جریان‌نمایش قهرمان مرد از قهرمان زن خواست که این راز را برای اوروشن کند که چگونه توانسته است‌که نه تنهابا سرکشترین‌آدمها بسازد، بلکه حتی‌آنها را هدایت هم بکند؟ وقهرمان زن توضیح دادکه او به این دلیل، چنین توفیقی را بدست آورده است که درواقع، همهٔ آنها را، در فاصلهٔ دوری از خود، نگه‌داشته است. در اینجا، یکباره، یکی ازدانشجویان فریادزد: «این همان قضیهٔ ریاضی است‌که‌ماامروزثابت‌کردیم». مسألهٔ ریاضی که‌دوست‌دانشجوی من، به آن اشاره می‌کرد، چنین بود: آیا می‌توانیم از یک نقطهٔ درونی،

طوری به طرف مجموعه‌ای از نقطه‌ها حرکت کنیم که در عین‌حال، به همهٔ نقطه‌های مجموعه، نزدیك شویم؟ پاسخ مسأله اینست: می‌توان، به‌شرطی که‌نقطهٔ مفروض به اندازهٔ کافی از مجموعهٔ نقطه‌ها، دور باشد.



از این نقطه، نمی‌توان‌به همهٔ‌نقطه‌های مجموعه نزدیك شد،وقتی‌که به یکی‌از نقطه‌های مجموعه نزدیك شویم،درهمان زمان از نقطه‌های‌دیگری، دور می‌شویم.



از این نقطه، می‌توان به‌همهٔ نقطه‌های مجموعه، نزدیك‌شد.

واما‌این‌ادعای دوست‌نویسنده‌ام‌را که گویا، استعدادورود به‌پیچید گیهای ریاضیات را نداردومثلاً هرگزنتوانسته است معنای «مشتق» و«دیفرانسیل» را یادبگیرد، من مطلقاً قبول نداشتم. من، تا آنجا که ممکن‌بود، سعی‌کردم راهی‌که به‌فهم این مفهومها می‌انجامد، به‌گامهای ساده‌تر وروشن‌تر تجزیه کنم، وآنوقت به‌حقیقت حیرت‌انگیزی رسیدم: برای ریاضیدان، تصور این مطلب ممکن نیست که فهم حتی ساده‌ترین رابطه‌های ریاضی ، برای آدمی که وارد نیست، تا چه حد دشوار است. درست به همین علت است که معلم ناآموزده نمی‌فهمد که چرا ، وقتی که حتی اگر بیست بار حرفهای «ش» ، «و»،«خ»و«ی»راتکرار کند، بازهم‌متوجه نمی‌شود که‌سخن برسر«شوخی»است. واینجا، مطلقاً صحبت از شوخی نیست.

این کشف،مرا به‌اندیشه‌های‌دور ودرازی برد. تا این زمان،من‌صمیمانه گمان می‌کردم‌که اگرناواردها، ریاضیات رانمی‌فهمند، تنها به این دلیل‌است

که کتابهای خوب و ساده‌ای که‌برای همه قابل فهم باشد ، مثلاً دربارهٔ حساب دیفرانسیل، نوشته نشده است . اینکه مردم، به چنین مسأله‌هایی علاقمندند، روشن است. واگر چنین کتابهایی‌وجود داشته باشد، مردم با علاقمندی تمام، آنهارا خواهند قاپید. ولی، تاکنون از اینگونه کتابها، به وسیلهٔ‌ریاضیدانان متخصص، نوشته نشده است. من به‌متخصصینی‌توجه‌داشتم که دقیقاً بدانند تاکجا می‌شود موضوع را ساده‌کرد، به نحوی که به دقت موضوع لطمه‌ای نزند وآنرا تحریف نکند.همچنین، این‌متخصص نبایددرزیر لفاف فریبندهٔ مطالب تازه؛ همان داروی کهنه وتلخ ریاضیات مدرسه‌ای را، پنهان کند؛ او باید موضوعها را، به همان شکلی‌که به‌نظر می‌آید ، مطرح کند. چنین مؤلفی؛ باید وقتی از اثر ریاضی خود خوشحال باشدکه بتواند خوانندگان خود را راضی کند وبه شوق آورد.

همان وقت، این فکر به‌سرم آمد که حتی ساده‌ترین کتابها هم ممکن است‌برای بعضی ازخوانندگان قابل فهم نباشد. ظاهراً، از صفتهای‌مشخصهٔ ریاضیات اینست‌که از کارهای نامطبوع نمی‌ترسد. ۱اقلیدس ، به فرمانروای خودگفته‌بودکه «در ریاضیات، جادهٔ شاهی وجودندارد»، این به‌معنای‌آنست که درریاضیات، حتی برای شاهان، نمی‌توان مسیری راحت ومطبوع‌ساخت. کتاب ریاضی را نمی‌توان به‌طور سطحی مطالعه کرد؛ اغلب باید نیروی زیادی صرف کرد تا عادت به انتزاع وتجرید ممکن شود، وراستش اینست که لذت‌ریاضیات هم، در همین تلاشها وسختی‌کشیدنهاست. حتی، ساده‌ترین وبهترین کتابهای ریاضی را، تنها کسانی می‌توانند بفهمندکه خود را برای چنین زحمتی آماده کرده باشند؛ کسی‌که تصمیم بگیردآنقدر حرفها و هجاها را تکرار کند تا به معنای فرمولها، پی‌ببرد.

باهمهٔ اینها، من‌کتابم را برای چنین خوانندگانی‌ننوشته‌ام. من‌دربارهٔ ریاضیات‌بدون فرمول می‌نویسیم ومی‌خواهم «روحیهٔ ریاضی» را روشن‌کنم. نمی‌دانم که در این باره تاچه حد موفق‌شده‌ام. گذشتن از فرمولها، به‌معنی

کنار گذاشتن خصوصیت اصلی ریاضیات‌است . شکل را نمی‌توان از محتوی جداکرد، اینراهم ریاضیدان وهم شاعرمی‌دانند؛ باوجوداین، پیش خودتصور کنید که چگونه می‌توان روحیه وبرداشت غزل را، بیرون از شکل غـزل، توضیح داد! ومن جرأت کرده‌ام به چنین آزمایشی دست‌بزنم، با این امید که توانسته باشم روح راستین ریاضیات را حفظ کنم.

من تنها دریك مورد نتوانسته‌ام کار خواننده را ساده کنم : نمی‌شود جای بخشها را با هم عوض‌کرد، نمی‌شود بعضی قسمتهارا «برای بعد»باقی گذاشت، ولو برای‌کسی که بخواهد نگاهی تند برکتاب بیندازد. در بخشها وموضوعهای ریاضی، باید به‌تدریج و گام‌به‌گام،پیش رفت. دراینجا؛ هر کلمه وهر چیزی مهم است ؛ هیچ موضوعی را نباید بی ارزش دانست، حتی اگر ظاهراً کم اهمیت به نظر آید. علاوه برآن، از خواننده خواهش می‌کنم ؛ هرجا که لازم است، برای بهتر فهمیدن موضوع، خودش شکل را رسم کند ویا محاسبه‌ها را انجام دهد . درعوض، منهم وعده می‌دهم که کتاب، ملال‌آور نباشد.

من، خیلی از ریاضیات مدرسه‌ای استفاده‌نکرده‌ام: ازشمارآغازکرده‌ام وتا تازه ترین شاخهٔ ریاضیات، یعنی منطق ریاضی ، پیش رفته‌ام.

۱۰
شاگرد جادوگر

۱. بازی باانگشتان

ازآغاز شروع می‌کنیم. من خیال ندارم دربارهٔ تاریخ ریاضیات بنویسم؛ با وجوداین، من می‌توانستم، تنها باتکیه برآثار نوشته‌شده، به‌این کاربپردازم، ولی حتی کهن‌ترین این‌آثار، ازدیگر«منابع ریاضیات، خیلی جوانترند! انسان نخستین را، با همهٔ زندگی ساده وابتدایی خود، در لحظه‌ای درنظر بگیرید که شمردن را شروع می‌کند. این موضوع‌را می‌توان روی‌مردمانی هم که‌دربرابرچشمان ما، ازصورت‌رشدنیافتهٔ خود، به‌انسان متمدن تبدیل می‌شوند، بررسی کرد. می‌توان بچه‌ای را در نظر گرفت‌که ضمن بازی با انگشتان خود، دارد خود وجهان دور وبرخودرا می‌شناسد. او معمولاً به‌جای اینکه بگوید «یك»، «دو»، «سه»، «چهار» و«پنج»، عادت داردکه یکی‌یکی انگشتان خود راببندد وبگوید: «به‌این می‌دهم، اوهیزمها راشکست»، «به این می‌دهم، او تراشه‌ها را تمیزکرد»، «به‌این می‌دهم،اوبخاری راروشن‌کرد»،«به‌این می‌دهم، اوآب‌را آورد»، «اما به این نمی‌دهم، او نه هیزمها را شکست، نه تراشه‌ها را پاك کرد، نه‌بخاری را روشن کرد، ونه آب را آورد»[1] ـ واین اشاره به افسانهٔ کلاغچه است که شیربرنج درست می‌کند وبه بچه‌ها می‌دهد. من یکبار از پزشکی شنیدم، بیماران روانی پیدا می‌شوند که نمی‌توانند انگشتان خود را ازهم‌تمیز دهند، و این وضع، همیشه بستگی به از دست دادن

---

۱. شبیه بازی «لی‌لی حوضك» خودمان «م».

استعداد شمارش است.

این رابطهٔ متقابل مبهم و غیر ارادی کـه بین شمردن وانگشتان دست وجود دارد، درعین حال به‌تمدن آدمی هم بستگی دارد. من گمان می کنم، گرایشی که آدمی به‌سرگرمی‌وبازی دارد،خودیکی ازسرچشمه‌های ریاضیات است وبه‌ویژه بـه‌این خاطراست کـه دست‌کم دراین مرحله، ریاضیات نه تنها یك دانش، بلکه یك هنر هم می‌باشد.

امروزه، این نظریه بیشتر پذیرفته شده است که شمردن از همان آغازخود، امری آگاهانه وارادی‌بوده است. ممکن است که انسان‌نخستین می‌خواست میزان‌دارایی خود را تخمین بزند وبه‌شمردن پوست‌حیواناتی که متعلق به او بود، آغاز کرد. باوجود این، اینطور هم می‌توان گمان برد که شمردن، نوعی تشریفات جادوگری بـود. هنوز هم درزمان مـا، شمردن، نقش جادویی خود را حفظ کرده است: کسی که عصبانی است وازناراحتی مزاحم ورنج‌آوری،آشفته خاطراست، می‌تواند مثلاً تابیست



به آرامی بشمارد وبعد با دور شدن افکار مزاحم ـ در بـارهٔ چیزی کـه می‌خواهد، فکر کند. ولی، به‌هرشکلی که گمان کنیم، چه گفتگو برپوست حیوانات وحشی باشد، و چه فاصله‌های زمانی که یکی پشت سردیگری می‌آید، در هرحال، شمار بـه‌معنای آنست کـه بـه‌آنچه موجود است، بیفزاییم.

به این ترتیب، می‌توان از مرزده‌انگشت بیرون رفت وبلافاصله در برابر نخستین مخلوق پـرشکوه آدمی در ریاضیات ـ در برابر دنبالهٔ نامتناهی عددها ـ قرار گرفت:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ...

واین، همان رشتهٔ عددهای طبیعی است. این رشته نامتناهی‌است، زیرا بعدازهرعدد دلخواه، به‌هراندازه که‌بزرگ باشد، می‌توان‌عددی رانام بردکه یك واحد ازآن‌بزرگتر باشد. برای تشکیل‌این دنباله، بایداستعداد زیادی از نظر تصورهای‌انتزاعی داشت، که بـه‌یاری آن بتوان، عدد را تنها به مثابهٔ سایه‌ای از حقیقت، مجسم کرد. در اینجا دیگر عدد ۳ به معنای سه انگشت، سه سیب ویا سه‌ضربهٔ نبض‌نیست،بلکه کمیت‌مجردی است که بین همهٔ آنها مشترك وضمناً از آنها جـدا شده است. عددهای خیلی بزرگ را در واقع امرنمی توان بدست‌آورد: هیچکس یك میلیارد سیب راندیده است ویك میلیارد از ضربان نبض را محاسبه نکرده است. ما این عددهای بزرگ را،تنها در مقایسهٔ باعددهای کوچکتری که درعمل با آنها سروکار داریم، می‌توانیم پیش خود مجسم کنیم. در تصورخود می‌توانیم شمار را تا هـرکجا وتا هر عددی، که‌بزرگی آنرا بالاتر از هر تصوری بدانیم، ادامه دهیم.

جمع

ولی‌آدمی به شمردن قانع نمی‌شود. برای بشر، چیزی لذت‌بخش‌تر از تکرار نیست وهمین‌تکرار است‌که‌او را به‌جلومی‌برد. این تکرار، مثلاً خیلی‌خوب درشعر دیده می‌شود: درشعریک «وزن»تکرار می‌شود ومرتباً به‌یك «قافیه» برمی‌گردد. درست، به‌همین مناسبت است که بچهٔ کوچك از تکرار یك بازی خسته نمی شود: با پیگیری توپ را می‌اندازد، اگر چه این مداومت، از حوصلهٔ یك «انسان بالغ» بیرون است.

اگر به‌چهار رسیده باشیم، یك واحد به آن اضافه می‌کنیم! باز هم، یك واحد! وبعد باز هم، یك واحد! به کجا می‌رسیم؟ روشن است که هفت بدست می‌آید، درست مثل اینکه یکبار، سه را اضافه کرده باشیم. به این ترتیب، جمع راکشف می‌کنیم:

$$۴+۱+۱+۱=۴+۳=۷$$

ضرب

حالا، بازی با جمع راآغاز می‌کنیم. به ۳، ۳ را اضافه‌می‌کنیم، دوباره ۳ را وباز هم ۳ را. به‌این ترتیب، چهارمرتبه از ۳گرفته‌ایم. به طورکوتاه می‌توان اینطور بیان‌کرد: ۴ مرتبه ۳، برابر است با ۱۲. یعنی

$$۳+۳+۳+۳=۴\times۳=۱۲$$

واین عمل را ضرب می‌نامیم.

توان

نتیجهٔ تکرار را دیدید. خوب، نمی‌ایستیم وباز هم تکراررا، واین بار دربارهٔ ضرب، ادامه می‌دهیم. ۴ را در۴ وبازهم در۴ ضرب می‌کنیم،

بدست می‌آید:

$$۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$$

این تکرار، این ضرب عاملهای مساوی در یکدیگر را، توان‌می‌نامیم. در اینجا ۴، پایه است و به کمك عددی که دربالا وسمت راست این پایه می‌نویسیم (و آنرا نمامی‌نامیم)، معلوم می کنیم که چندباربابد در خودش ضرب شود. بنابراین، به یاری این نشانه گذاری، می‌توانیم بنویسیم:

$$۴^{۳} = ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$$

می‌بینم که نتیجهٔ «تکرار»، هرباربزرگتر ازپیش می‌شود: ۴×۳ از ۴+۳ بزرگتر است و $۴^{۳}$ از ۴×۳. این تکرار لذت بخش، ما رابه عددهای‌بزرگتروبازهم بزرگترمی‌رساند. این مطلب وقتی روشنتر می‌شود که تکرار رابرای توان هم‌انجام دهیم. ابتدا ۴ را به‌توان ۴ می‌رسانیم:

$$۴^{۴} = ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴ \times ۴ = ۲۵۶$$

حالا، اگر بخواهیم ۴ را به‌توان $۴^{۴}$ برسانیم

$$۴^{۴^{۴}} = ۴^{۲۵۶} = ۴ \times ۴ \times ۴ \times \dots$$

اگر بخواهیم، تنها همین چهارهای‌تکراری را بنویسیم، خسته می‌شویم. ما باید ۲۵۶ بار عدد چهار را بنویسیم، وتازه بعد ازآن باید آنها را در هم ضرب‌کنیم! درنتیجه، عددی بسیار بزرگ، عددی که در تصور نمی‌گنجد، بدست می‌آید، وبه همین مناسبت صدای عقل‌سلیم را می‌شنویم که: اگر چه تکرار، ساده وراحت است، ولی ما درقضاوتهاو

استدلالهای خود، تکرار متوالی عمل ضرب را به‌کار نمی بریم.

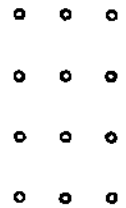
بیایید روی یک موضوع توافق کنیم: اندیشهٔ آدمی از هر وسیله‌ای که به‌چنگ می‌آورد، استفاده می کند، ولی آنهایی را نگه می‌دارد که ساده‌تر، مفیدتر و عمومی‌تر باشد.

جمع، ضرب و به توان رساندن، برای تلاشهای آدمی، بسیار مفید و در عین حال عمومی است؛ و به‌همین مناسبت همه جا در ریاضیات رسمیت پیدا کرده‌اند و ویژگیهای آنها هم، تا آنجا که به‌کار ساده‌تر شدن محاسبه یاری می‌دهد، بازشناخته شده است. مثلاً ۲۸ × ۷ را هم می‌توان از راه ضرب ۷ در ۲۸ بدست آورد و هم برای ساده‌تر شدن عمل، می‌توان ۲۸ را به‌مجموع دو عدد تبدیل کرد و سپس ۷ را در هر کدام از این جمله‌ها ضرب کرد. ضربهای ۲۰ × ۷ و ۸ × ۷ را ساده‌تر می‌توان انجام داد و سپس مجموع ۵۶ + ۱۴۰ هم بدون هیچ زحمتی بدست می‌آید. برای جمع چند عدد، بهتر است بیاد داشته باشیم که با تغییر جای جمله‌های جمع، حاصلجمع تغییر نمی‌کند. به این ترتیب، مثلاً مجموع ۲ + ۷ + ۸ را می‌توان اینطور بدست آورد: ۱۰ = ۲ + ۸ و ۱۷ = ۷ + ۱۰ و به‌این وسیله، از جمع «ناخوشایند» ۷ + ۸ خود را کنار بکشیم. تنها باید بپذیریم که جمع عبارتست از اضافه کردن آن مقدار واحدهایی که در جملهٔ بعدی وجود دارد، در اینصورت بلافاصله روشن می‌شود که تغییر جای جمله‌های جمع، نتیجه را تغییر نمی‌دهد.

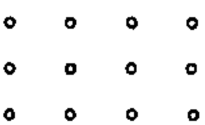
درحالت ضرب هم، می‌توان همین قانون را، که البته نسبت به جمع دشوارتر است، کشف کرد. ۳ × ۴ یعنی ۳ + ۳ + ۳ + ۳، ضمناً ۴ × ۳ یعنی ۴ + ۴ + ۴. روشن بودن این تساوی، خیلی بدیهی به‌نظر نمی‌رسد که

$$۳+۳+۳+۳=۴+۴+۴$$

ولی، اگر به‌صورت تصویری آن مراجعه کنیم، به تدریج روشن می‌شود. ابتدا، چهارردیف ودر هرردیف سه نقطه قرار می‌دهیم، به این ترتیب:



و خیلی زودمی‌توان متوجه شدکه اگردرسه ردیف چهارنقطه قراردهیم، بازهم همین شکل بدست‌می‌آید (هردوشکل، مستطیل‌اند، منتهی‌یکی‌روی عرض ودیگری روی طول خود «خوابیده» است):



وبه‌این ترتیب، معلوم‌می‌شودکه $۴\times۳=۳\times۴$. به‌همین مناسبت است که درریاضیات، هردوجملهٔ ضرب را به‌یك نام می‌خوانند: عامل‌ضرب.

به‌عنوان نمونه، باز هم ازیك خاصیت، که‌مربوط به‌توان است نام می‌بریم:

$$۴\times۴\times۴\times۴\times۴=۴^{۵}$$

اگر این تکرار عاملها، شما را خسته می‌کند، می‌توانیم استراحت کوتاهی برای شما درست کنیم. حاصلضرب سه عامل اول می‌شود $۴^{۳}$ و حاصلضرب دو عامل بقیه $۴^{۲}$. بنابراین

$$۴^{۳}\times۴^{۲}=۴^{۵}$$

نمای نتیجه برابر ۵، یعنی ۲+۳ است. به‌این ترتیب، برای ضرب دو توان‌ازعدد۴، می‌توانیم نماهاراباهم جمع کنیم. واین، یک قانون کلی است. مثلاً

$$۵^۴ \times ۵^۲ \times ۵^۳ = \underline{۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵} \times \underline{۵ \times ۵} \times \underline{۵ \times ۵ \times ۵} = ۵^۹$$

که ۳+۲+۴ هم مساوی ۹ می‌باشد.

دوباره مسیری راکه پیمودیم، به‌یاد بیاوریم. هرعملی را به یاری شمار انجام دادیم. این پرسش پیش می‌آید که: همهٔ اینها درست، ولی تکلیف تفریق وتقسیم چه می‌شود؟

این دوعمل،چیزی جزعکس‌مسیرهای‌قبلی‌نیستند (دربارهٔ عملهای ریشه‌گرفتن و لگاریتم گرفتن هم باید به همین ترتیب قضاوت کرد). مثلاً ۵ : ۲۰ به‌معنای‌آنست که‌بایدعددی‌راجستجو کنیم که۵برابرآن‌برابر عدد۲۰ شود. این‌عدد را به‌سادگی می‌توان‌بدست‌آورد،زیرا ۴ × ۵ = ۲۰. ولی‌همیشه کاربه‌همین‌سادگی‌تمام‌نمی‌شود، چنین‌عددی‌همیشه‌وبه طور کلی پیدا نمی‌شود. مثلاً، در عدد ۲۳، نمی‌توان عددهای مساوی ۵ را، بدون باقیمانده‌پیدا کرد. ۲۰ = ۵ × ۴، این کمتراز۲۳ است، ولی۲۵ = ۵ × ۵، که از ۲۳ بزرگتر می‌شود. بنابراین باید به عدد کوچکتر قانع شویم و بگوییم که عدد۵به‌اندازهٔ ۴ بار در۲۳ می‌گنجد وعدد ۳ هم باقی‌می‌ماند.

روشن است که این وضع، پرزحمتتر و ملالت آورتر ازتکرارهای عادی است. عملهای معکوس به‌حیله‌های بیشتری نیازدارد و درست به همین مناسبت است که ریاضیدانها دوست‌دارند به‌آنها،حمله‌ببرند. آخر ریاضیدان، آدمی است که رضایت خود را در میان دشواریها، جستجو می‌کند.

۳. «منحنیهای حرارتی»

عملهای حسابی

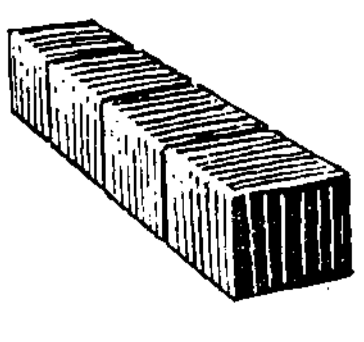
جحم مکعب

دیدیم که تکرار عملها، مارا به جاهای دور،به‌میدان عددهای بزرگ ، می‌رساند. ولی، تا چه اندازه دور؟ در این باره، کمی درنگ می‌کنیم.

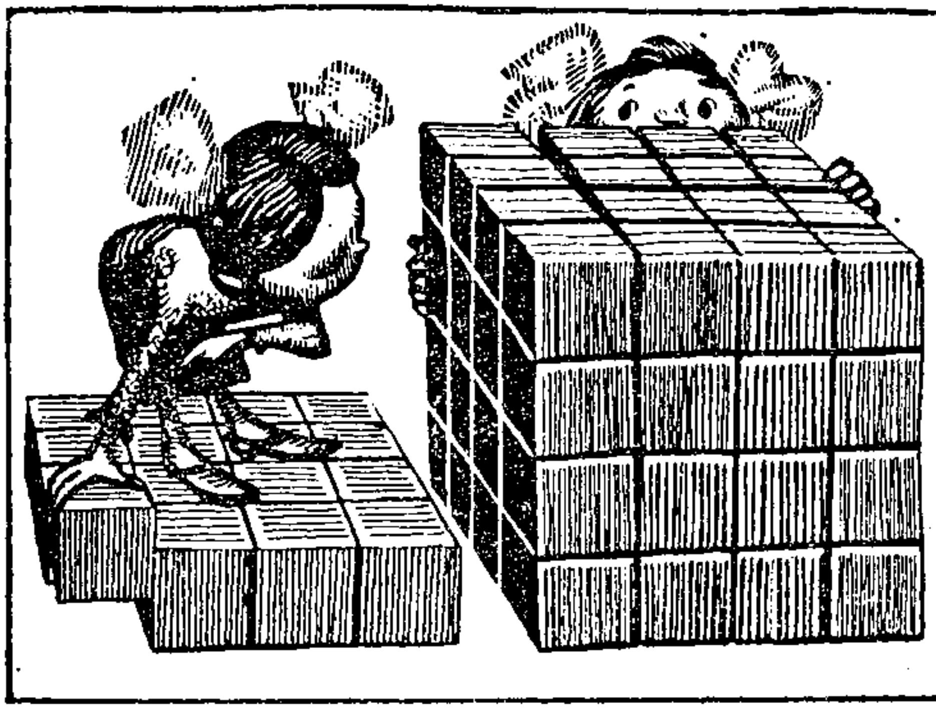
وقتی که مثلاً می‌خواهیم حجم مکعب را حساب کنیم، باید از توان استفاده کنیم. ابتدا مکعب کوچکی را به‌عنوان واحد، برمی‌گزینیم وخود را دربرابراین پرسش قرارمی‌دهیم: چندتا از این مکعبهای کوچك درمکعب بزرگی که‌می‌خواهیم اندازه بگیریم، جا می‌گیرد؟ فرض کنیم، مکعب واحد، يك سانتیمتر مکعب باشد، یعنی مکعبی که هم طول، هم عرض وهم ارتفاع آن، برابر با يك سانتیمتراست.



چهار تا ازاین مکعبهای کوچك را، پهلوی هم می‌گذاریم، چنین ردیفی بدست می‌آوریم:



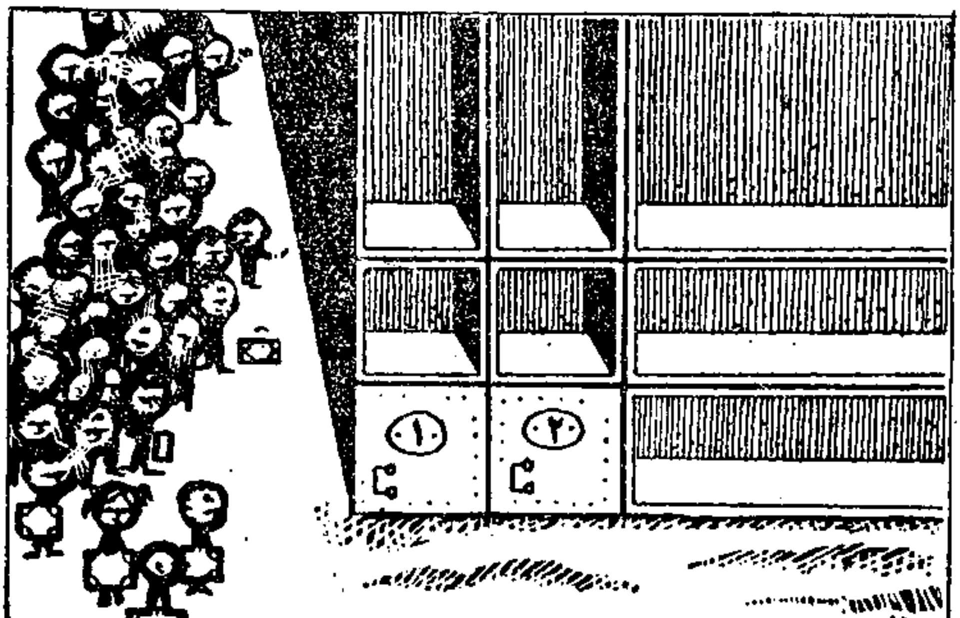
حالا، اگر چهارتا از این ردیفها راپهلوی هم بگذاریم، قشری بدست‌می‌آوریم که در آن $۴^۲ = ۴ \times ۴$ مکعب وجود دارد. سرآخر،چهارتا ازقشرها را رویهم مـی‌چینیم؛ دراینصورت مکعب بزرگی پیدامی شودکـه شامل $۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۳ = ۶۴$ مکعب است.



به‌این ترتیب، در مکعبی که طول،عرض وارتفاع آن، برابر بـا ۴ سانتیمتر است، به‌اندازهٔ $۴^۳$ سانتیمتر مکعب، جامی گیرد. درحالت کلی، حجم مکعب از این راه بدست می‌آید که طول یکی از ضلعهای آنرا،به توان ۳ برسانیم. به‌همین مناسبت است که توان سوم را، مکعب گویند[۱]. بـه‌یاری همین توان سوم است که این حقیقت روشن می‌شود که‌مکعب

۱. معلمین از این بیان خشنودنیستند، من باید می گفتم: اندازهٔ حجم مکعب از این راه بدست می‌آید که اندازهٔ طول را بـه‌توان سوم بـرسانیم. ولی، من نمی‌خواهم به‌خواننده، ازبابت چنین نازك اندیشیها، فشاربیاورم. من، حتی از این موضوع هم بدون توضیح گذشته‌ام که آیا می‌توان ضلع‌هر مربعی رابا سانتیمتر بیان کرد. دربارهٔ این‌پرسش، مابازهم گفتگو خواهیم کرد.

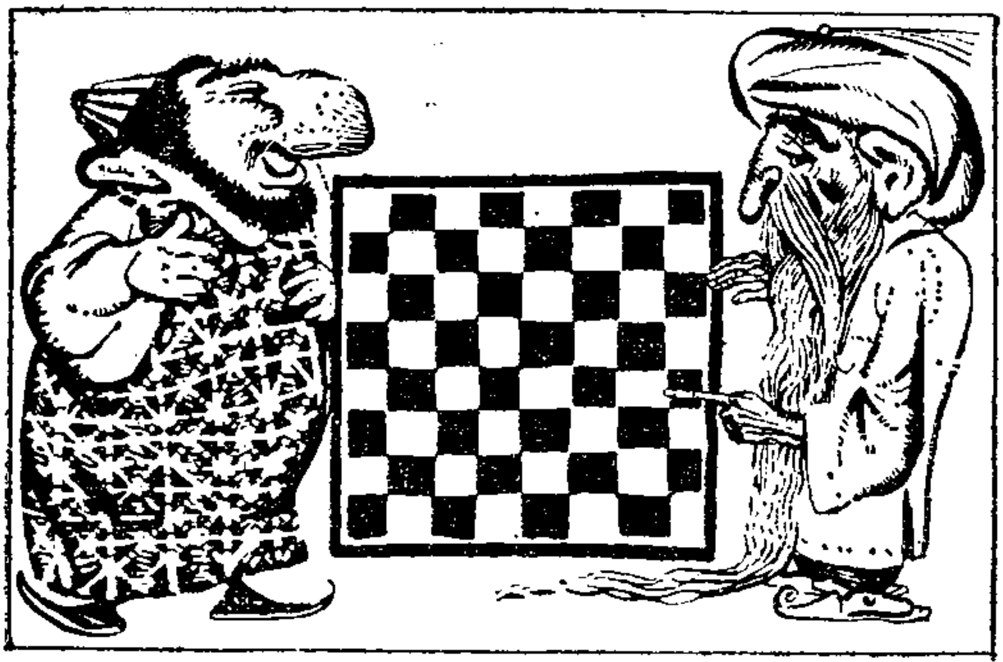
با ضلع کم وبیش کـوچك، می‌تواند حجمی بسیار بـزرگ داشته باشد. مثلاً، یك کیلومتر، فاصلهٔ خیلی بزرگی نیست؛ هرکسی می تواند این فاصله را پیش خود مجسم کند. ولی، اگر مکعبی بسازیم، کـه‌ضلع‌آن برابر با این فاصله باشد، حجم‌آن چنان عظیم خواهدشدکهٔ می‌تواندبیش از نیمی از جمعیت کرهٔ زمین را درخودش جا بدهد. اگرکسی دراین‌باره شك دارد، خودش، می‌تواند محاسبه‌کند. فرض‌می‌کنیم بین‌آدمها، کسی بلندتر از ۲متر نباشد. دراینصورت می‌توانیم‌دراین مکعب‌بـه‌فاصله‌های ۲ مترازیکدیگر سقفهایی بگذاریم؛ به‌این‌ترتیب، برای‌ارتفاع‌یك‌کیلومتر یعنی ۱۰۰۰ متر، درست ۵۰۰ طبقه‌بدست می‌آوریم؛ کف هرکدام‌ازاین طبقه‌ها را، چه‌درطول‌وچه‌درعرض‌به‌نوارهایی‌به‌عرض‌یك‌مترتقسیم‌می‌کنیم:



به‌این‌ترتیب، درهرنوار، ۱۰۰۰مربع وجود دارد وضمناً ازاینگونه‌نوارها هم ۱۰۰۰ تـا پیدامی‌شود. بنابراین، درهـرکف ۱۰۰۰×۱۰۰۰، یعنی ۱۰۰۰۰۰۰ مربع پیدامی‌شود. طول وعرض هرکرام از این مربعها برابر یك‌متر است ودر نتیجه، می‌توان روی هرکـدام ازاین مربعها، ۴ نفررا

به راحتی جا داد. به این ترتیب، در هر طبقه، ۴ ملیون نفرو در ۵۰۰ طبقهٔ مکعب، ۵۰۰ برابر چهار ملیون، یعنی ۲ میلیارد نفر را می‌توان جا داد.

برای محاسبهٔ حجم مکعب، تنها از توان سوم استفاده کردیم، نماهای بالاتر، مارا به‌مرکزانبوه‌تری ازعددهای بزرگ می‌برد. فرمانروای هند، چقدرشگفت زده شد، وقتی که آفرینندهٔ بازی شطرنج، تنها «مشتی» گندم به‌عنوان پاداش، درخواست کرد. او خواست که درنخسین خانه‌از



صفحهٔ شطرنج او یك دانه گندم؛ در خانهٔ دوم، دو برابر خانهٔ اول؛ در خانهٔ سوم، دوبرابرخانهٔ دوم، یعنی $۲^{۲}$ دانه گندم بگذارند وغیره. این درخواست، خیلی ناچیز به‌نظرمی‌رسید. ولی، درواقع، درخانهٔ آخرصفحهٔ شطرنج توان بالایی از ۲ قرار داشت و رویهم لازم بود به اندازهٔ

$$۱+۲+۲^{۲}+۲^{۳}+۲^{۴}+\dots+۲^{۶۳}$$

دانهٔ گندم به‌آفرینندهٔ بازی‌شطرنج داده شود. (اگرخواننده‌بخواهد، می‌تواند توانهای حذف شده را خود بنویسید، ولی‌من حوصلهٔ این کارراانداشتم.)

اگر کسی بخواهد مقدار این گندمها را حساب کند، آنقدر گندم بدست می‌آورد که باآنها می‌تواند تمام سطح کـرهٔ زمین را با قشرتقریباً یـك سانتیمتری بپوشاند.

حالا دیگر،ازاین‌مطلب‌تعجب‌نمی‌کنیم که تکراربه‌توان رساندن، ما را به‌جاهای دور وباور نکردنی می‌رساند. وباوجود این،هنوز می‌خواهم مطلب‌کوچك، ولی جالبی را، اضافه کنم. آیا ممکن است گمان کنید که تنها برای توشتن رقمهای‌عدد $۹^{۹^۹}$،به‌نوار کاغذی‌به‌طول ۱۸۰۰ کیلومتر نیازداریم، به شرطی که برای هررقم، نیم سانتیمتر جـا درنظر بگیریم. برای محاسبهٔ دقیق $۹^{۹^۹}$، تمام عمریکنفر کفایت نمی‌کند.

نمایش نموداری تابع

وقتی که دوباره، آنچه را که نوشته‌ام، می‌خواندم، متوجه شدم که مرتب روی این مفهوم تکیه کرده‌ام‌که: عملها «ما را به‌جای دور و باورنکردنی می‌برد»، «مارا به عددهای بزرگ می‌رساند»، واین مطلب، حتی برای زمانی که با دنبالهٔ افقی عددها، یعنی

$$۱،۲،۳،۴،۵،...$$

سر کارداریم، بـاز هم‌درست است.

بابیان دقیق‌تر باید بگویم که‌هرقدربه‌طرف راست جلوتر بروم، با عددهای‌بزرگتری‌روبرومی‌شوم. جمله‌هایی راکه‌قبلاً بـه کاربرده‌ام،بیشتر زیر اثرعاملهای‌احساسی بود. «بزرگتر می‌شود»، به‌معنای اینست که‌رشد می‌کندودرذهن ما، رشدکردن به معنای میل به طرف بالاست. ریاضیدان به این احساس، شکل مشخصی می‌دهد؛ او اغلب تصورات ذهنی خود را

با رسم شکل، محسوس وقابل درك می‌کند؛ وافزایش تند را بـه‌صورت خطی که‌به‌طور ناگهانی به‌طرف بالا «پرواز می‌کند»، نشان می‌دهد.

بیماران ، بااین شکلها به‌خوبی آشناهستند. آنها می‌دانند که با بررسی منحنی مربوط بـه درجهٔ حرارت بدن آنها، می‌توان آگاهیهایی دربارهٔ حرکت بیماری بدست آورد. فرض کنیم که‌در فاصله‌های زمانی ثابتی،درجهٔ حرارت بیمار را اندازه‌گرفته و به این‌نتیجه‌ها رسیده‌باشند:

$$۳۶/۵^\circ \text{، } ۳۷^\circ \text{، } ۳۸/۵^\circ \text{، } ۳۸^\circ \text{، } ۳۹^\circ \text{، } ۳۹^\circ \text{، } ۳۸/۵^\circ \text{، } ۳۸^\circ$$

این وضع را می‌توان به‌ترتیب زیرنشان داد. نخست، فاصله‌هـای زمانی متوالی را روی خط راست افقی، بـه‌صورت پاره خطهای مساوی نشان می‌دهیم:

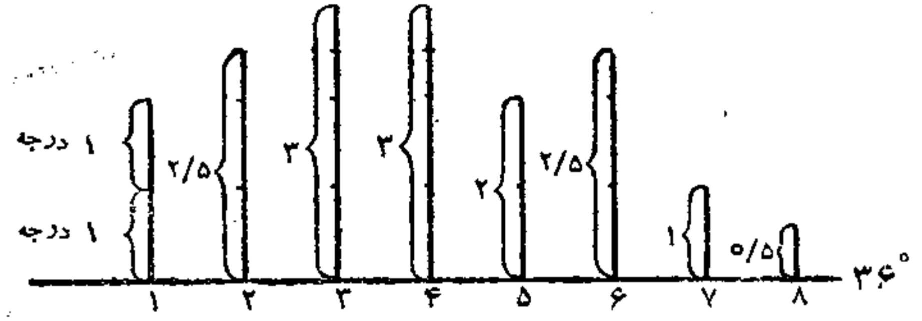


سپس، پاره‌خط دلخواهی را به‌نشانهٔ یك‌درجه برمی‌گزینیم وازهرنقطه‌ای که‌نمایندهٔ لحظهٔ زمانی‌اندازه‌گیری درجهٔ حرارت است، پاره‌خطی‌مساوی تعداد درجه‌های این لحظه، به طرف بالا می‌کشیم.

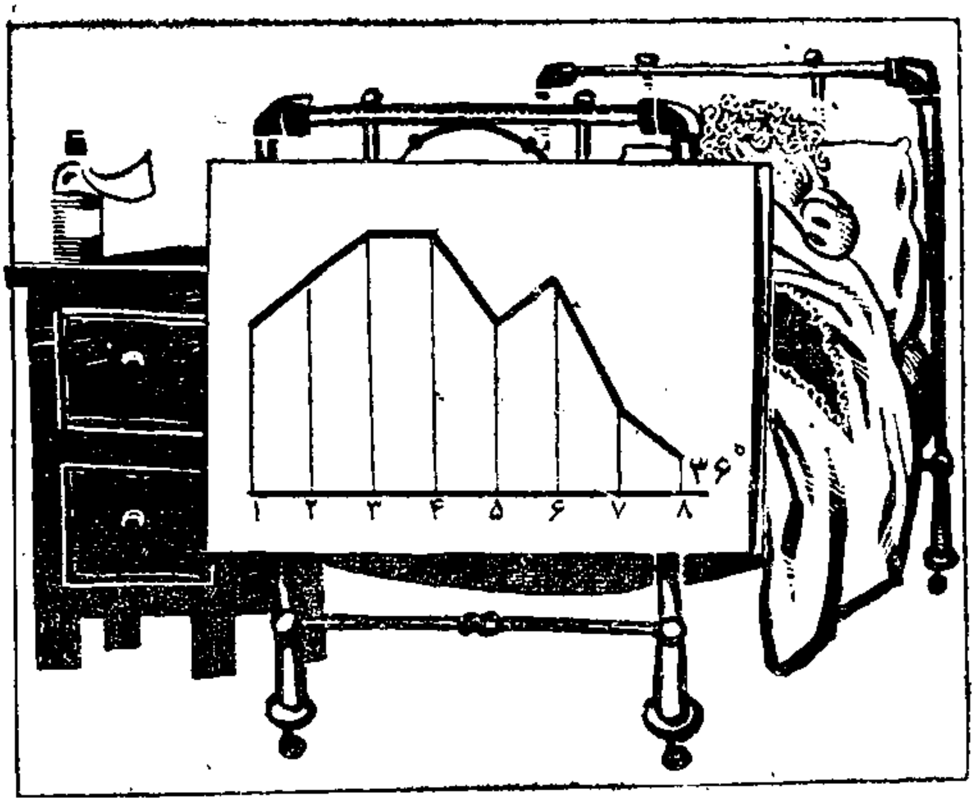
ولی، لازم‌نیست پاره خطهای‌به این‌درازی رسم‌کنیم. درجهٔحرارت بیمار به‌پایین ۳۶ درجه نرفتهٔ است، بنابراین می‌توانیم ارتفاع خط افقی را متناظر بـا حرارت ۳۶ درجه بگیریم؛ دراینصورت، روی شکل بـاید پاره خطهایی بهٔاین طولها به‌طرف بالا بکشیم:

(درجه) ۰/۵ ، ۱ ، ۲/۵ ، ۲ ، ۳ ، ۳ ، ۲/۵ ، ۲

این نمودار بدست می‌آید:



حالا، اگر انتهای این پاره خطها را با خط راست به هم وصل کنیم، منحنی حرارتی کاملی بدست می‌آید:

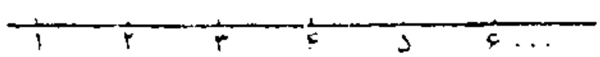


این نمودار، همهٔ آنچه را که ما می‌خواهیم برای ما توضیح می‌دهد. بالارفتن «منحنی» بهٔ معنای افزایش درجهٔ حرارت و پایین آمدن آن، به معنای کاهش درجهٔ حرارت است. درابتدا درجهٔ حرارت بهٔ طوریکنواخت بالا می‌رود، این مطلب از اینجا دیده می‌شود که انتهای سه پاره خط اول روی یك خط راست قرار گرفته‌اند. پاره‌خط افقی، بهٔ معنای ثابت ماندن

بیماری است. باوجودی کـه در اندازه‌گیری ششم، درجـهٔ حرارت کمی بالا رفته است، بیمار درحـال شفایافتن است ، زیـرا سقوط منحنی بین اندازه‌گیریهای ششم وهفتم، زیاداست، طوری کــه درجهٔ حرارت بیمار را به‌حدکافی پایین آورده است.

هیچ چیزنمی‌تواندمانع‌ازاین شودکه اینگونه«منحنیهای حرارتی» را برای عملهای حسابی هم به‌کاربریم.

معمولاً، عددها را روی خط راستی‌که محورعددی نامیده‌می‌شود، نشان می‌دهند. روی این خط راست،نقطهٔ دلخواهی را به‌نام ۰، به‌عنوان مبدأ شمار، بر می‌گزینیم و سپس پاره خطهای برابررا ازاین نقطه،یکی پس از دیگری، جدا می‌کنیم:



کسی کـه مـی‌خواهد زحمت محاسبه را بـه خودندهد، می توانـد بـا به‌کارگرفتن محورعددی ، عملها را به طور کاملاً مکانیکی انجام دهد. مثلاً، برای اینکه ۳+۲ را محاسبه کند، کافی‌است ازعدد ۲،۳ گام به سمت راست بردارد ودرآنجا بلافاصله، عدد ۵ را پیداکند. برای اینکه ۳ــ۵ را محاسبه کند، باید باشروع از ۵، سه‌گام بـه سمت‌چپ بردارد وغیره. در دبستانها هم، بچه‌ها محاسبه را به‌همین ترتیب، وبه‌کمك جا به جا کردن مهره‌هایی کـه روی میله حـرکت می‌کنند (شبیه چرتکه)، یادمی‌گیرند.

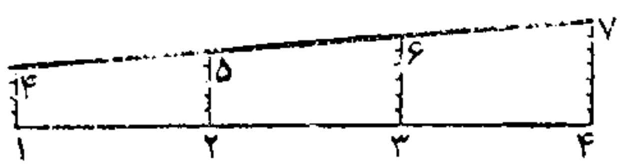
حالا می‌خواهیم ازخط افقی به طرف بالا برویم. با جهت‌گیری‌از عددی، ومثلاً ۳، به‌طرف بالا، ببینیم چه بدست می‌آید، وقتی‌که به‌این عدد، عددهای ۱،۲،۳ وغیره را یکی بعد از دیگری اضافه کنیم؛ یاآنرا درعددهای ۱،۲،۳ وغیره پشت سرهم ضرب کنیم، ویا بالاخره، این عدد

را به‌طور متوالی به توانهای ۱،۲،۳ وغیره برسانیم؟ (درخودبیان «به توان رساندن»، مفهوم میل به‌طرف بالا، وجود دارد.)

از جمع آغاز می‌کنیم:

۳+۱=۴
۳+۲=۵
۳+۳=۶
۳+۴=۷

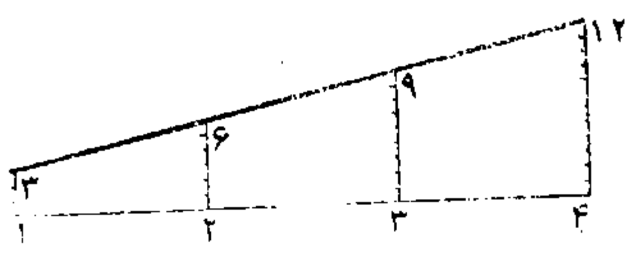
جملهٔ دوم‌جمع را، که‌تغییرمی‌کند،روی خط افقی‌نشان می‌گذاریم، ومجموع متناظر با آنرا، به طرف بالامی‌بریم. اگر واحد روی خط افقی را به اندازهٔ پاره خط ــــــــ، و واحد جهت عمودی را بـه اندازهٔ پاره خط ـ بگیریم، «منحنی حرارتی»جمع را بدست می‌آوریم:



همهٔ نقطه‌های انتهایی پـاره خطها، در اینجا روی یـك خط راست قـرار گرفته‌اند.این به معنای‌آنست کـه وقتی یکی‌از جمله‌های جمع را زیاد می‌کنیم، مجموع به طور یکنواخت رشد می‌کند.

درحالت ضرب

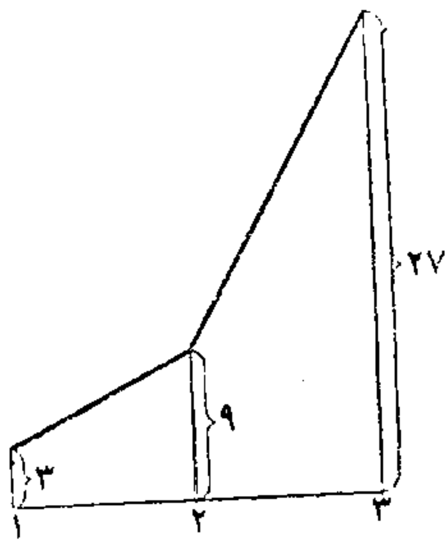
۳×۱=۳
۳×۲=۶
۳×۳=۹
۳×۴=۱۲



وقتی که یکی از عاملهای ضرب بزرگ شود، حاصلضرب هم به طور یکنواخت، رشد می‌کند. ولـی، درحالت ضرب، سرعت رشد خیلی بیشتر از حـالت جمع است؛ شیب خط راست دوم، خیلی بیشتر از شیب خط راست اول است.

بالاخره، به توان رساندن را بررسی می‌کنیم:

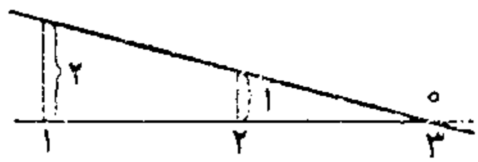
$۳^{۱}=۳$
$۳^{۲}=۳\times۳=۹$
$۳^{۳}=۳\times۳\times۳=۲۷$
$۳^{۴}=۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$



رشد توان یکنواخت نیست ودرعین حال سرعت رشد خیلی بیشتر است: $۳^{۴}$ را نمی‌توان دراین صفحه جاداد.

به همین ترتیب، می‌توان «منحنیهای حرارتی» را برای عملهای عکس هم درست کرد. «منحنی حرارتی» برای تفریق:

$۳-۱=۲$
$۳-۲=۱$
$۳-۳=۰$



یك خط راست نزولی است؛ بنابراین، اگر جملهٔ اول تفریق عددی ثابت وجملهٔ دوم آن مرتباً بزرگ شود، تفاضل به طـور یکنواخت، کـوچك

می‌شود.

تقسیم، عملی بسیار بهانه گیر است. به همین مناسبت بررسی «منحنی حرارتی» آنرا برای بعد می‌گذاریم.

«منحنیهای حرارتی» راکه هم اکنون رسم کردیم، در ریاضیات، «نمودار نمایش تابع» گویند.

درحالت جمع، مقدار مجموع به این بستگی داردکه جملهٔ متغیر را چگونه انتخاب کنیم؛ می‌گوییم که مجموع، تابعی‌ازجملهٔ‌متغیراست،و ما تغییرات این تابع را به وسیلهٔ نمودار، نشان داده‌ایم.

درست به‌همین ترتیب، حاصلضرب، تابعی از عامل متغیر آن؛ و توان، تابعی ازنمای آنست وغیره.

به‌این ترتیب،حتی ساده‌ترین‌عملهای حساب، ما را به‌طرف‌مفهوم تابع می‌کشاند. از این به بعدهم، مااغلب به چنین بستگیهایی برخورد می‌کنیم.

مفهوم تابع، تمام هستهٔ ریاضیات را تشکیل می‌دهد.

۳. شکستن دنبالهٔ نامتناهی عددها

دستگاه‌های شمار

درمقایسه با بازی با انگشتان، چقدر جلوتر رفته‌ایم! اگرتااینجا تااندازه‌ای فراموش کردیم که آدمی ده‌انگشت دارد، تنها به‌این‌مناسبت بود که نمی‌خواستیم خود راگرفتار محاسبه‌های خسته‌کننده‌کنیم. والا، این مطلب را همه می دانندکه‌برای نوشتن یك عدد، هر قدرهم که‌بزرگ باشد، ماتنها از ده علامت مختلف استفاده می‌کنیم:

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

چگونه می‌توان، هریك از عضوهای مجموعهٔ نامتناهی عددها را، به‌یاری تنها ده علامت، نوشت؟ این امکان به‌این مناسبت وجود دارد که می‌توانیم دنبالهٔ عددها را، که به‌طور یکنوا (مونوتون) به طرف بی نهایت کشیده شده است، بشکنیم وبه گروههایی تقسیم کنیم. ده یکه رامی‌شماریم وآنها رادریك دسته قرار می‌دهیم. وبه‌آنها نام‌تازه‌ای می‌دهیم. ده‌یکه را،یك دهه می‌نامیم. درست‌همانطورکه می‌توانیم‌ده‌سکه یك ریالی را بایك سکهٔ ده ریالی عوض‌کنیم. حالا اگر شمردن را ادامه دهیم، می‌توانیم قدمهای بعدی را برداریم. هیچ چیز نمی‌تواند مانع شود که ده تا از این دسته‌های ده یکه‌ای را با هم یکی کنیم و یك سده تشکیل دهیم. به‌همین‌ترتیب، می‌توان ده تاسده رادریك پاکت قراردهیم وآنرا هزاربنامیم، ده‌تا ازاین پاکتهارادریك جعبه‌بگذاریم وآنرا ده‌هزار بنامیم، به همین ترتیب به‌صدهزار ویك میلیون برسیم وهرچه بخواهیم از آنهم جلوتر برویم. وبه این دلیل است که می‌توانیم هرعدد دلخواه را با همان ده علامتی که دربالا آوردیم، بنویسیم.

وقتی که‌بخواهیم ازنه‌عبورکنیم، می‌توانیم‌بازهم‌یك‌یکه‌بنویسیم، ولی این دیگر یك دهه است. عدد بعدی از یك دهه ویك یکه تشکیل‌شده است، به‌همین مناسبت می‌توانیم آنرا به یاری دوتا یك بنویسیم (۱۱) ممکن است در نظراول‌گمان‌کنیم که‌برای ده،صد، هزاروغیره‌به‌علامتهای تازه‌ای نیازداریم، ولی‌باکمی‌اندیشه می‌توان ازاین‌علامتها صرفنظرکرد.

صندوقدار مغازه، سکه‌های یك ریالی، دو ریالی، پنج ریالی، ده ریالی‌وبیست ریالی رادرخانه‌های مختلف صندوق خود قرارمی‌دهد. در خانهٔ سمت راست کوچکترین سکه‌ها (یك ریالیها) وبه همین ترتیب

در خانه‌های بعدی سکه‌های بزرگتر را می‌گذارد. وقتی که جای سکه‌ها ثابت باشد، صندوقدار به تدریج چنان به‌جای آنها عادت می‌کند که بدون نگاه کردن به‌آنها، می‌داند که مثلاً در خانهٔ سوم صندوق، چه سکه‌ای قرار گرفته است.

به‌همین ترتیب، در مورد عددها هم،برای جای یکها، دهها، صدها و غیره ، توافق می‌کنیم. یکها را درسمت راست می‌نویسیم و سپس در سمت چپ‌آن به‌ترتیب مرتبه‌های بعدراقرار می‌دهیم. بنابراین،سمت چپ‌یکها، مرتبهٔ دهها قرار می‌گیرد؛ در ردیف سوم، مرتبه سدها وغیره. در این طرز نوشتن، دیگر لازم نیست نام هرمرتبه در کنار آن نوشته شود، زیرا از جای هررقم، می توانیم مقدار آنرا معین کنیم. به این ترتیب، مقدار رقمها به موضع وجای آنها بستگی پیدا می‌کند. عدد

۳۵۴

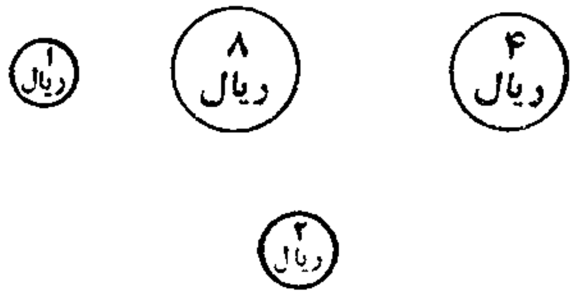
از ۴ یکه ، ۵ دهه و ۳ سده، تشکیل شده است. این، دستگاه عدد نویسی موضعی است،که درآن می‌توانیم هر عدد دلخواه را باده علامت،نشان دهیم وبه همین مناسبت دستگاه دهدهی نامیده می‌شود.

البته، هیچ مانعی ندارد که تقسیم رشتهٔ طبیعی عددها، را قبل‌یا بعد از ده، انجام دهیم. دربارهٔ انسانهای نخستین شنیده‌ام که همهٔ هنر عدد شماری آنها به مفهومهای «یك»، «دو» و«بسیار» پایان می‌پذیرفت. باوجود این، برای آنها هم‌می‌شد یك دستگاه‌عدد شماری ساخت: دراین حالت، دو یکه (یعنی‌دو) یکه مرتبه تازه را به وجود می‌آورد، دو یکهٔ مرتبهٔ دوم، نمایندهٔ یك یکهٔ مرتبهٔ سوم (چهار) است، دویکهٔ مرتبهٔ سوم برابر یك یکه از مرتبه چهارم (هشت) می‌شود و غیره. در این دستگاه

دو دویی ، برای نوشتن هر عدد دلخواه، دوعلامت بس است:

۰,۱

اگر برای شمار، از این سکه‌ها استفاده کنیم (که البته بعضی از آنها در واقع وجود ندارند):

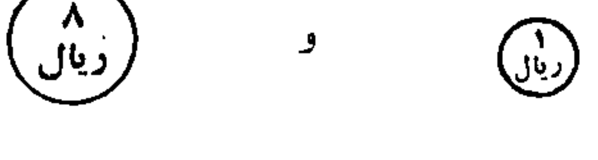


یعنی یکه‌های دستگاه دودویی را به‌عنوان سکه‌هایی درنظر بگیریم، فهم مطلب ساده‌تر خواهد شد. مثلاً چگونه می‌توان با کمترین تعداد ممکن سکه‌ها، ۱۱ریال را نشان داد به‌سادگی دیده می‌شود که سه سکهٔ



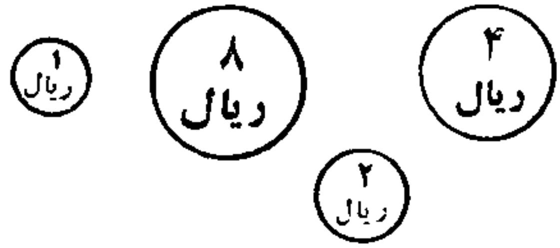
(۱)

را می‌توان به‌جای ۱۱ ریال داد وضمناً یازده ریال را نمی‌توان با تعداد کمتری سکه بدست آورد. به‌همین ترتیب



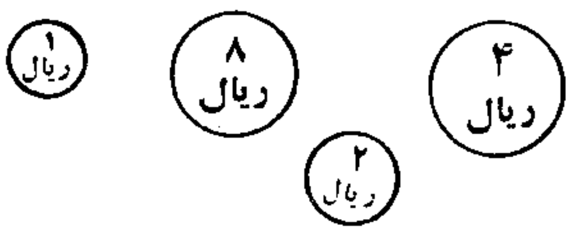
(۲)

۹ ریال را می‌دهند و



(۳)

رویهم ۱۵ ریال رانشان می‌دهند. از خواننده خواهش‌می‌کنم که خودش هرکدام ازعددهای ۱ تا ۱۵ را با سکه‌های



تشکیل دهد، به‌نحوی‌که هرسکه را بیش از یکبار به کار نبرد، یعنی هرکدام یا ۰ مرتبه و یا ۱مرتبه. عدد ۱۶ رابه‌این‌ترتیب نمی‌توانیم‌پیدا کنیم. واین هیچ شگفتی ندارد، زیرا ۸ × ۲ = ۱۶، یعنی ۱۶ یکهٔ مرتبهٔ بعدی است. درنمونهٔ (۱) دیده می‌شودکه عدد ۱۱ را می‌توان دردستگاه دودویی به این ترتیب نوشت:

۱۰۱۱

این دنبالهٔ عددها،دراین حالت (ازراست‌به‌چپ) به‌این معنی‌است: یك یکه، یك دو، هیچ چهار ویك هشت؛ که در واقع رویهم مساوی ۱۱ می‌شود. همچنین،ازنمونه‌های (۲) و(۳) معلوم می شودکه ۹ و۱۵، در دستگاه دو دویی به اینصورت نوشته می‌شوند:

۱۰۰۱ ، ۱۱۱۱

می بینید که در اینجا، تنها به‌دوعلامت نیازداریم.

بدنیست کـه محاسبهٔ وارونه را هم آزمایش کنیم: ۱۱۱۰۱ در دستگاه دو دویی برابر است با: ۱ یکه+ یك چهار+ یك هشت+یك شانزده =۱+۴+۸+۱۶=۲۹ ، یعنی ایـن عدد در دستگاه دهدهی برابر باعدد ۲۹ می‌شود.

چرا به‌ویژه، ازاینگونهٔ دستگاههای شماراستفاده می کنند؟تنظیم خانوادهٔ عددها به‌این ترتیب، کارهـرگونه محاسبه‌ای را ساده می‌کند؛ مثلاً درجمع می‌توانیم یکها را بایکها، دهها را بـادهها جمع کنیم و همینطور تا آخر. صندوقدار هم دریـافت خود را درپایان روز، به‌همین ترتیب حساب می کند.نخست مقدارهرکدام از سکه‌های برابر راکه‌دریك خانهٔ صندوق قراردارند، حساب مـی کند وبعد ایـن مجموعها را رویهم می‌ریزد.

میل به‌طرف سادگی وراحتی، موضوعی بسیارمهم است و اغلب محرك اصلی وتعیین کنندهٔ پیشرفت ریاضیات بوده است. نـاراحتتـرین عملها، تقسیم است. احتمال داردکه‌همین دشواری تقسیم موجب تقسیم رشتهٔ عددها به‌گروهها، شده باشد. چقدر خوشحال می‌شویم، وقتی کـه بتوانیم تقسیم رابدون باقیمانده، انجام دهیم. عددهای جالب وقشنگی وجوددارندکه‌بربسیاری ازعددهای دیگر،بدون‌اینکه‌باقیمانده‌ای‌بیاورند، بخش‌پذیرند. مثلاً ۶۰، از اینگونه عددهاست:

$$۶۰=\begin{cases} ۱\times ۶۰ \\ ۲\times ۳۰ \\ ۳\times ۲۰ \\ ۴\times ۱۵ \\ ۵\times ۱۲ \\ ۶\times ۱۰ \end{cases}$$

به‌این ترتیب، عدد۶۰ برعددهای ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۱۰،۱۲،۱۵،۲۰،۳۰ و ۶۰، بدون باقیمانده، بخش پذیراست.

حالا، اگربخواهیم عدد بزرگی را بریکی ازاین دوازده عددتقسیم کنیم (لزومی نداشت‌که عدد ۱ را هم به‌حساب بیاوریم، زیرا این عدد، نه درضرب اثری دارد و نه درتقسیم)، اگر به‌یاد بیاوریم که مقسوم (همچون هرعدد دیگری) از یکه‌ها تشکیل شده است، کارخود را ساده‌تر کرده‌ایم.

نخست ۶۰ تا از این یکه‌ها بر می‌داریم سپس ۶۰ تای دیگر و به همین ترتیب، تا جایی که تاحد ممکن، به عدد خود نزدیك شویم. تقسیم این شصتها، هیچ دشواری ندارد. در باقیمانده هم دست بالا، ۵۹ پیدامی‌شود، یعنی عددی که بزرگ نیست وحتی اگرباقیمانده هم داشته باشد، می‌توان آنرا تقسیم کرد.

بااین اندیشه، باید عددها را درگروههای ۶۰ تایی منظم کرد. و قدیمیها هم، که برای حل مسأله‌های اخترشناسی باتقسیمهای بزرگ سروکار داشتند، همین کار را کردند ـ آنها، دستگاه شصت شصتی را برای اندازه‌گیری‌زاویه‌وزمان‌برگزیدند. آنها،محیط‌دایره را به ۶۰×۶، یعنی ۳۶۰ قسمت‌کردندوهرقسمت را یك درجه نامیدند. هردرجه، شامل ۶۰ دقیقه وهردقیقه، شامل ۶۰ ثانیه‌بود. تقسیم ساعت به دقیقه وثانیه هم به‌همین ترتیب است.[۱]

۱. عدنویسی در دستگاه شصت شصتی را بابلیها (مردم سرزمین‌بین‌النهرین باستانی)به‌وجودآوردند.آنها از دستگاه شصت شصتی درنوشته‌های علمی و ازدستگاه دهدهی در نوشته‌های دیگر استفاده‌می کردند. عددنویسی موضعی‌وبه‌کار بردن صفر را هم‌برای نخستین بار بابلیها کشف کردند. برای آگاهی بیشتر در این زمینه می‌توانید به‌کتاب «ریاضیات‌درشرق» مقالهٔ «ریاضیات ملتهای‌قدیم بین‌النهرین» مراجعه کنید (م).

باوجود این، عدد ۶۰،عددکوچکی نیست وبه‌کاربردن‌آن‌آنقدرها راحت نیست. بین عددها، نزدیکترین عدد به ۱۰ ، که مقسوم علیه‌های زیادی دارد، عدد ۱۲ است:

$$۱۲=\begin{cases} ۱\times ۱۲ \\ ۲\times ۶ \\ ۳\times ۴ \end{cases}$$

۱،۲،۳،۴،۶ و ۱۲ ـ رویهم شش مقسوم علیه، در صورتی که ۱۰ تنها برچهار عدد بخش‌پذیراست: ۱،۲،۵و۱۰. ما همچنین به‌ردپـای دستگاه دوازده دوازدهی هم برمی‌خوریم. مثلاً، سال برابر با ۱۲ ماه و دوجین برابر با ۱۲ عدد است. باوجود همهٔ اینها، دستگاه دهدهی پیروزی‌کامل بدست آورده است ـ وایـن‌گواه برآنست که بازی باانگشتان، علیرغم صلاحدید شعور آدمی، چه تأثیر بزرگی در آدمی داشته است.

زبان فرانسوی‌گواه‌برآنست‌که‌آدمیان زمانی‌باانگشتای پا هم‌بازی می‌کرده‌اندوبه‌همین مناسبت است‌که‌ردپای‌دستگاه‌بیست بیستی‌درآن‌زبان وجود دارد: در زبـان فرانسوی، هشتـاد را «چهـار مـرتبه بیـست» (quatre-vingt) ونود را«چهارمرتبه‌بیست‌وده»(quatre-vingt dix) می‌گویند.

قانونهای بخش پذیری

به‌شرح دستگاه دهدهی می‌پردازیم و وضع عمل تقسیم را دربارهٔ آن بررسی می‌کنیم.

دراین دستگاه ساده‌تر از همه، تقسیم بریکی از مقسوم علیه‌هـای

عدد ده است: ۲ ، ۵ و ۱۰. ایـن عددها، بـدون باقیمانده، در ۱۰، جا می‌گیرد. و این به معنای آنست کـه همین عددها، در $۲۰ = ۱۰ \times ۲$ و $۳۰ = ۱۰ \times ۳$ وبه طورکلی، در هر مضربی از ده، بدون باقیمانده،می‌گنجند. همین وضـع در مـورد $۱۰۰ = ۱۰ \times ۱۰$ وبنابرایـن در مـورد $۲۰۰ = ۱۰۰ \times ۲$ و $۳۰۰ = ۱۰۰ \times ۳$ وسخن‌کوتاه، درمورد هر مضربی از صد، هزار وغیره‌هم صادق است. می‌بینیم کـه دهها، سدها، هزارهـا وغیره، همهٔ بر۲ ، ۵ و۱۰ بخش پذیرند.

این می‌ماندکه ببینیم‌آیا یکهاهم‌براین‌عددها بخش پذیرند یـانه. عدد ۱۰، از همهٔ عددهای از ۱ تا ۹ بزرگتر است؛ واین به‌معنای‌آنست که اگر درعددی، به‌جای یکها، رقمی غیراز ۰ وجود داشته باشد، این عدد نمی‌تواند بر۱۰ بخش پذیر باشد. تنها عددهایی بر ۱۰ بخش‌پذیرند که‌یکها نداشته باشند. نبودن یکها را بارقم۰ نشان‌می‌دهیم، بنابرایـن، قاعدهٔ معلوم بخش پذیری بر۱۰ را بدست می‌آوریم:

تنهاعددهایی بر۱۰ بخش‌پذیرندکه به‌رقم۰ختم‌شده‌باشند. تنها عدد یك رقمی که بر ۵ بخش پذیر است، خود عـدد ۵ است و این قـاعده پیدا می‌شود:

تنها،عددی بر۵ بخش‌پذیراست‌که به‌رقم ۵یا۰ختم شده‌باشند.بالاخره، از بین عددهای یکرقمی، ۲ ، ۴ ، ۶ و ۸ بر ۲ بخش پذیرند وبنابراین

عددی‌بر۲ بخش‌پذیراست‌که‌به‌۰،۲،۴،۶یا۸ختم‌شده‌باشد. اینگونه‌عددها را، عددهای زوج می‌نامیم.

به این ترتیب ، همهٔ مقسوم علیه‌های ۱۰ را بـه پایان رساندیم، ولی هنوز همهٔ امکانات دستگاه دهدهی به‌پایان نرسیده است. یکهٔ‌بعدی

دراین دستگاه، ۱۰۰ است و به سادگی می‌تـوان همهٔ مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۰۰ را جستجو کرد. مثلاً، عدد ۴ در ۱۰ به‌تعداد درستی جانمی‌گیرد، ولـی در ۱۰۰ می‌گنجد،زیـرا ۱۰۰ = ۲۵ × ۴. بنابرایـن،۴مقسوم‌علیه ۲۰۰ = ۱۰۰ × ۲ و به طور کـلی همهٔ صدها وطبعاً همهٔ هـزارها (زیرا ۱۰۰۰ = ۱۰۰ × ۱۰) ومرتبه‌های بعد، می‌باشد. ولی ما ازقبل نمی‌دانیم که آیا یکها وده‌ها بر ۴ بخش‌پذیر است یانه.برای اینکه بدانیم، عددی بر ۴ بخش پذیراست یا نه، آزمایش می‌کنیم که‌آیا عدد دو رقمی‌سمت راست آن بر ۴ بخش پذیراست یانه. مثلاً، عدد

۳۴۷۸۶۲۴

بر ۴ بخش پذیر است، زیرا۲۴ بر ۴ بخش پذیراست. این نتیجه را می‌توان بایك نگاه تند، بدست‌آورد، زیرا به هیچوجه لازم نیست بـه پنج رقم دیگری که عدد را تشکیل داده‌اند، توجهی بکنیم. بـه همین ترتیب می‌توان بلافاصله فهمید که عدد

۳۱۲۴۸۶ ۴۳۴

بر ۴بخش پذیر نیست، زیرا از رویهم قرادادن عدد ۴، نمی‌توان‌بدون باقیمانده به‌عدد ۳۴ رسید.

بعد از مقسوم علیه‌های ۱۰۰، به سراغ مقسوم علیه‌هـای ۱۰۰۰ می‌رویم. مثلاً، عدد ۸، مقسوم علیه ۱۰۰نیست، زیـرا ۸، مقسوم علیه هشتاد است وباقیماندهٔ ۲۰ بر۸بخش‌پذیرنیست. ولی‌این عدد ۸، مقسوم، علیهی از ۱۰۰۰ است، زیـرا ۱۰۰۰ را می‌تـوان بـه صـورت مجموع ۴۰ + ۱۶۰ + ۸۰۰نوشت، وهرکدام ازاین جمله‌ها هم مضربی‌از۸هستند.

بنابراین همهٔ هزارها، ده‌هزارها، صدهزارها وبعد ازآن، بر ۸ بخش پذیرند وبرای اینکه ببینیم عددی بر ۸ بخش پذیراست یانه، کافی است عددسه رقمی سمت راست آنرا مورد آزمایش قرار دهیم.

به‌این ترتیب، روشی‌پیداکردیم که به یاری‌آن می توان به‌سرعت معلوم کرد که آیا عدد مورد نظرما، برعدد دیگری که برگزیده‌ایم، بخش پذیراست یانه.

ماتنها بایدبدانیم که‌آیاعدد ۱۰ بر عددانتخابی ما، بخش‌پذیراست یانه. اگر پاسخ، مثبت است، در اینصورت تنها رقم آخر عدد موردنظر ما، به پرسش‌مسأله‌پاسخ می‌گوید. اگرهم، پاسخ منفی است، باید ببینیم عدد انتخابی، مقسوم‌علیه کدامیك از عددهای ۱۰۰، ۱۰۰۰ یا ۱۰۰۰۰ است وسپس، بسته‌به‌این نتیجه گیری، باید ۲، ۳ یا ۴ رقم آخر عدد را مورد آزمایش قرار دهیم.

روشن است، عددهایی وجود داردکه‌نه ۱۰، نه ۱۰۰، ونه‌هیچکدام از توانهای ده، برآنها بخش‌پذیر نیستند، وبه سادگی دیده می‌شود که بیشتر عددها چنین‌اند. ولی، برای این عددها هم می‌توان باسودجستن از از استدلالی که کردیم، قاعده‌هایی پیدا کرد. ساده‌تر از همه می‌توان برای حالتی که مقسوم علیه مابرابر ۹ است، ازاین وضع استفاده کرد:

$$۱۰=۹+۱،\ ۱۰۰=۹۹+۱،\ ۱۰۰۰=۹۹۹+۱، \ldots$$

دیده می‌شود که ۹ مقسوم علیه هیچکدام از عددهای ۱۰، ۱۰۰و ۱۰۰۰نیست. هرکدام ازاین عددها که‌را به ۹ تقسیم کنیم، باقیمانده‌ای مساوی ۱، بدست می‌آید. همین حقیقت: که باقیمانده همیشه مساوی ۱ است، ما را به طرف نشانهٔ‌بخش‌پذیری بر۹ راهنمایی می‌کند: اگر۱۰ را

بر ۹ تقسیم کنیم، باقیمانده برابر ۱ می‌شود، اگر ۲۰ رابر ۹ تقسیم کنیم، باقیمانده برابر ۲ می‌شود و به طورکلی، وقتی دههای یك عدد را بر ۹ تقسیم کنیم، باقیمانده برابر با همان رقم دهها می‌شود.

در تقسیم عدد صدها به۹ هم، به‌همین نتیجه می رسیم: درتقسیم ۱۰۰بر۹ به باقیماندهٔ ۱ ودرتقسیم ۲۰۰ بر۹، به‌باقیماندهٔ ۲ وبه‌طورکلی درتقسیم‌عدد صدها بر۹ به باقیمانده‌ای مساوی همان رقم‌صدهامی‌رسیم؛ برای هزارها وده‌هزارها وغیره هم به همین نتیجه می‌رسیم.

برای اینکه‌بدانیم عددی بر۹ بخش پذیراست یا نه، آنرا به یکها، دهها، صدها وغیره تقسیم می‌کنیم. مثلا

۴ یکه + ۳ دهه + ۲ سده = ۲۳۴

در تقسیم بر۹، برای ۲ سده به باقیمانده‌ای برابر ۲ وبرای ۳ دهه به باقیمانده‌ای برابر ۳ وبرای ۴ یکه، به باقیمانده‌ای برابر ۴ می‌رسیم. در نتیجه باقیماندهٔ کل برابر ۴+۳+۲ می‌شود، ولی

۲+۳+۴=۹

ایی مجموع بر ۹ بخش‌پذیراست. بنابراین، عدد ۲۳۴ هم بر ۹ بخش‌پذیر است. ازاینجا قانون مورد نظر بدست می‌آید:

عدد داده شده‌وقتی بر۹ بخش پذیر است که‌مجموع‌رقمهای آن بر۹ بخش‌پذیرباشد.

مجموع رقمهای یك عدد، به مراتب ازخود عدد کوچکتراست و به کمك این قاعده می‌توان بلافاصله معلوم کرد که آیا عددی بر۹بخش پذیر است یا نه. عدد

۲۳۰۴۵۷۶

را در نظر می‌گیریم. مجموع رقمهای این عدد چنین می‌شود:

۲+۳+۴+۵+۷+۶=۲۷

واز جدول ضرب می دانیم که ۲۷ بر ۹ بخش پذیراست. عدد

۲۳۰۴۵۷۷

بر ۹ بخش‌پذیر نیست، زیرا مجموع رقمهای آن

۲+۳+۴+۵+۷+۷=۲۸

بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

* * *

در بررسیهایی که می‌کردیم، دور وبردشواریهای بنیانی تقسیم چرخ‌می‌زدیم،بدون اینکه به‌این دشواریها برخورد کنیم. ولی،حتی همین چرخ زدن، پرثمر بود: در هرگام، باﺑﺴﺘﮕﯿﻬﺎی غیر منتظره‌ای مواجه می‌شدیم.

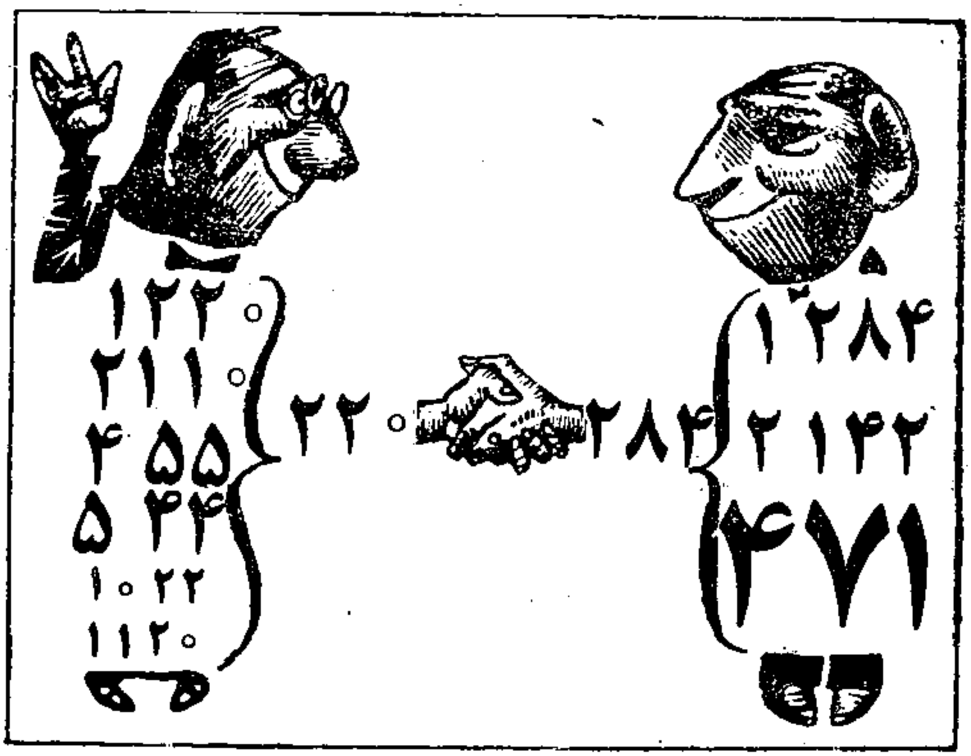
بعدتر، ما حتی تصورمحسوسی‌از تقسیمهایی که دارای باقیمانده هستند، بدست خواهیم داد. و این، راه را برای دلیرانه‌ترین مفهومهای ریاضیات، می‌گشاید.

۴. شاگردد جادوگر

در مفهوم‌بخش پذیری، مطالب جالب بسیار پیدا می‌شود،بنابراین بدنیست که مقداری با شرینکاریهای مربوط بـه تقسیم، سرگرم شویم. مثلاً باید برای ما جالب باشد که عددهای دوست هم وجود دارد.

دو عدد را دوست‌یامتحابه گویند،وقتی‌که مجموع مقسوم علیه‌های

خاص هرکدام ازآنها، برابربا عدددیگر باشد وبرعکس ماخودعددراجزو مقسوم‌علیه‌های خاص، به‌حساب‌نمی‌آوریم (مثلاً، مقسوم‌علیه‌های‌خاص ۱۰ عبارتست‌از: ۱، ۲و۵). مثلاً دوعدد ۲۲۰و۲۸۴، دوعددمتحابه‌اند، زیرا



مجموع مقسوم علیه‌های خاص ۲۲۰ برابر است با

۱+۲+۴+۵+۱۰+۱۱+۲۰+۲۲+۴۴+۵۵+۱۱۰=۲۸۴

ومجموع مقسوم علیه‌های خاص ۲۸۴ برابر است با

۱+۲+۴+۷۱+۱۴۲=۲۲۰

عددهایی هم وجود داردکه برابربا مجموع مقسوم‌علیه‌های‌خاص خودشان‌هستند. به‌اینگونه‌عددها، عددهای‌کامل‌گویند. مثلاً، ۶یکی‌ازاینگونه عددهاست. مقسوم‌علیه‌های خاص این عدد عبارتست از ۱ ، ۲ و۳وضمناً

$$۱+۲+۳=۶$$

در قدیم، برای اینگونه عددها، خاصیتهای جادویی قایل‌بودند و وبه‌همین مناسبت‌با جدیت درجستجوی این عددهابودند. عددهای‌زیادی، بااین خاصیت پیدا شد که مناسبتر از همهٔ آنها، عدد ۲۸ است:

$$۲۸=\begin{cases}۱\times ۲۸\\ ۲\times ۱۴\\ ۴\times ۷\end{cases}$$

$$۱+۲+۴+۷+۱۴=۲۸$$

دیگر عددها، به اندازهٔ کافی بزرگ‌اند. همهٔ عددهای کاملی که تاکنون شناخته شده است، عددهایی زوج‌اند. حتی دستوری برای‌پیدا‌کردن عددهای‌زوج‌کامل وجوددارد، با وجود این‌ما تاامروزنمی‌دانیم‌که آیا این دستور ما را به‌عددهای کاملی، که به دلخواه بزرگ باشند، می‌رساند یانه! عددهای کامل فرد تاکنون کشف نشده‌اند؛ آیا اصولاً چنین عددهایی وجود دارد،پرسشی است‌که‌هنوز درانتظار پاسخ خود مانده است.

به این ترتیب، ما به کجا رسیده‌ایم؟ انسان به‌خاطر نیازهایی که داشت، رشتهٔ عددهای طبیعی را درست کرد؛ این رشته،که آفریدهٔانسان است وبرای شمردن وانجام عملهای حسابی بـه خدمت انسان درآمد، نتیجه‌ای از شماراست. ولی، انسانی‌که خود این رشتهٔ عددها رابه‌وجود آورده بود،بعدهاتاحدی تسلط وحاکمیت‌نسبت‌به‌آنرا ازدست داد. رشتهٔ طبیعی عددها، زندگی مستقیمی پیدا کرد، به نحوی‌که کسی به‌خودحق نمی‌داد دگرگونیهایی در آن به‌وجود آورد، چنان به قانون خاص خود

درآویخته بود کـه حتی درخواب هم کسی گمان نمی برد کـه انسان، آفرینندهٔ آنست. شاگردجادوگر، نیروهای جادویی را فراخوانده وحالا، خود در بند آنهاگرفتار وبه آنها تسلیم شده‌بود. انسان، دنیای تازه‌ای را آفرید وسپس خود در درون رازهای نـاشی از قانـونهای ایـن دنیا، محصوروگرفتارشد. آنوقت این انسان، دیگرآفرینندگی خود را ازدست داد وتنها به‌جستجوگری تبدیل شدکه‌به بررسی‌بستیگهای‌این‌دنیای‌اسرار آمیز می پردازد، دنیایی که خودش به آن زندگی بخشیده بود.

تصاعد حسابی

پژوهش وبررسی، از اینجهت دلچسب است که درواقع، نیازمند هیچ دستگاه و وسیلهٔ پیچیده‌ای، بـه جز دوچشم تیزبین نیست. یکروز، شاگرد ده ساله‌ای پیش من آمد وپرسید:

من متوجه شده‌ام که اگردنبالهٔ عـددها را تا یـك عدد فـرد رویهم بریزیم، مجموعی بدست می‌آید که برابر است باحاصلضرب عدد آخردر عدد وسط. مثلاً اگرمجموع عددها را از ۱ تا ۷ در نظر بگیریم، می‌توان برای بدست‌آوردن حاصلجمع، عدد آخر (یعنی ۷) را درعددی‌که‌درست وسط ۱و۷ قرار گرفته است(یعنی ۴) ضرب کنیم: ۲۸ = ۷ × ۴، ضمناً روشن است که

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷=۲۸$$

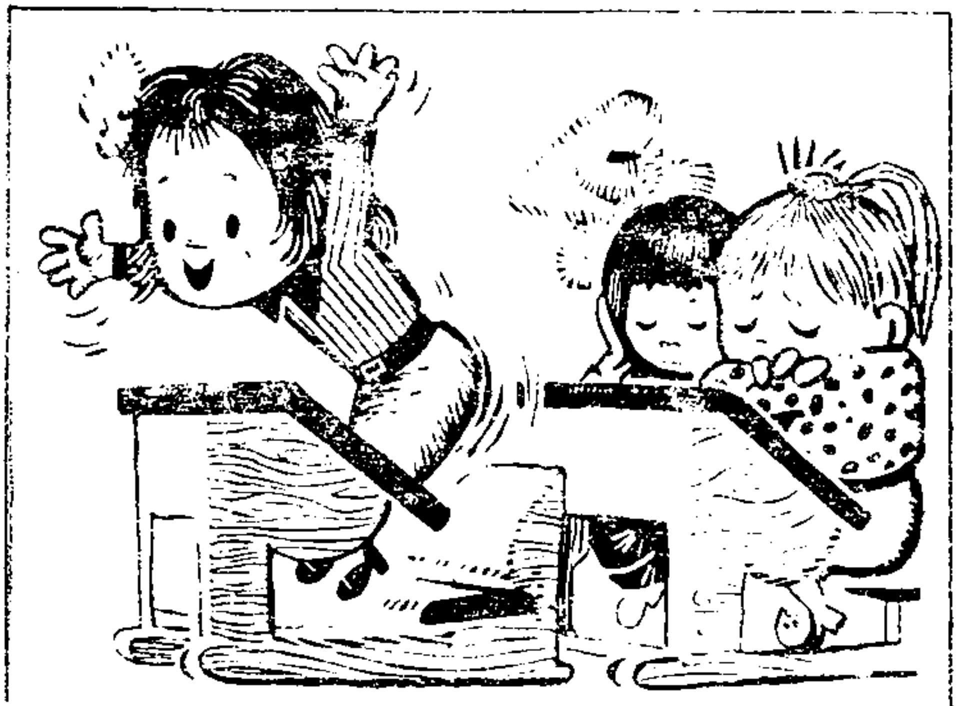
من می‌دانم که این قاعده همیشه درست است، ولـی نمی‌دانم کـه چرا درست است!

من پیش خود فکر کردم کـه ایـن تصاعد حسابی است و وجود

این قانون برای آن طبیعی است، ولی من چطور آنرا بسرای بچهٔ ده ساله روشن کنم ؟ من به طرف کلاس برگشتم وگفتم:

«۱» یك مسالهٔ جالب پیدا کرده است!

من هنوز توضیح خود را دربارهٔ موضوع مسأله تمام نکرده بودم که زیرکترین دختر کلاس طوری ازجا پرید کـه بهزحمت توانست از افتادن خود جلوگیری کند



من گفتم «۱»، بی عقلی نکن، من هنوز حرفم‌را تمام‌نکرده‌ام، ممکن نیست به این سرعت، موضوع را فهمیده باشی.

ولی عکس‌العملی طوفانی «۱»، بیجهت نبود:

ـ «۱» ۷ را در ۴ ضرب کرده است، یعنی

۴+۴+۴+۴+۴+۴+۴

ولی «ا» می‌خواسته است که‌مجموع

۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷

را بدست آورد. به این ترتیب، «ا» به‌جای عدد ۱ ، عدد ۴ را به‌حساب آورده است، تااینجا ۳ واحد بیشتر حساب کرده است. ولی به جای ۷ هم، عدد ۴ راگرفته‌است واین۳واحد کمتر است. بنابراین، رویهم اختلافی پیش نمی‌آید. به همین ترتیب، ۲، به اندازه ۲ واحد از ۴ کمتر و ۶ به اندازهٔ ۲ واحد از ۴ بیشتر است؛ در اینجا هم اختلافی پیدا نمی‌شود. وقتی‌که عددهای ۳ و ۵ راهم مساوی۴ می‌گیریم، درمجموع تغییری پیدا نمی‌شود. به همین جهت است که دومجموع، یکی ازآب درمی‌آید.

من‌باید قدر «ا» را می‌دانستم؛ من‌هرگز نمی‌توانستم با این‌مهارت موضوع را روشن کنم! گاهی ازذهن جستجوگرمحققین کوچك‌چیزهایی می‌گذرد که بسیار جالب، جدی وشایان توجه است.

یکی دیگر از شاگردان من، ماریای کوچك فریاد زد:

ـ این مثل دفترچه است!

ـ روشن‌تر بگو، چه می‌خواهی بگویی؟

ـ درمسالهٔ ما، جملهٔاول باجمله‌آخر مقایسه‌می‌شود،بعدجملهٔ دوم بایکی‌مانده‌به‌آخر. درست مثل‌صفحه‌های دفترچه؛دراینجا هم‌صفحهٔ‌اول به صفحه‌آخـروصل است وصفحهٔ دوم به صفحهٔ یکی مانده به‌آخر.

گوس ، این «سلطان ریاضیدانها» هم، وقتی‌که دانش‌آموز کوچکی بود، این رابطه را کشف کرد. حکایت می‌کنند که معلم گوس ، که‌می‌

خواست چند دقیقه‌ای استراحت کند، از او خواست که همهٔ عددها از ۱ تا ۱۰۰ را باهم جمع کند. ولی امید معلم برای چند دقیقه استراحت بربادرفت، خیلی زود صدای گوس بلند شد:

ـ جواب ـ ۵۰۵۰ !

معلم دید که پاسخ گوس کاملاً درست است. ولی او به‌چه‌ترتیبی توانسته است، بااین سرعت، نتیجه را پیداکند؟

ـ من متوجه شدم که

$$۱+۱۰۰=۱۰۱;$$
$$۲+۹۹=۱۰۱;$$
$$۳+۹۸=۱۰۱$$

۵۰ مرتبه باید جمله‌ها را از اول و آخراین دنبالهٔ عددها، انتخاب کرد، و ۱۰۱×۵۰ مساوی ۵۰۵۰ می‌شود.

گوس کوچك، ردیفی ازعددهارا با هم جمع کرده بود، تعداد عددها برای او زوج بود، با وجوداین، از همان روشی استفاده کرده بود که شاگرد من «۱» ، برای پیدا کردن مجموع همهٔ عددها، تا یك عدد فرد، به کار برده بود. اگرروند استدلال را کمی تغییردهیم، می‌توانیم دو روش را یکی کنیم. یك لطیفهٔ قدیمی می‌گویدکه کسی نظری به چراگاه‌انداخت وبا اطمینان خاطر گفت «در اینجا ۳۵۷ گوسفند وجود دارد». وقتی که از او پرسیدندکه چگونه این مطلب را دانستی، پاسخ داد: «خیلی‌ساده! من همهٔ پاها را شمردم ونتیجه را بر چهار تقسیم کردم». ریاضیدان هم بارها به همین گونه عمل می کند. وقتی که‌مثلاً، گفتگو از مجموع همهٔ عددهای درست تا یك عدد مفروض باشد، بدون هیچ زحمتی می‌توان دو

برابر مجموع لازم را پیداکرد. کافی است عدد اول را به عددآخراضافه کند، عدد دوم را به عـدد یکی مانده به آخر وغیره. برای این منظور، می‌توان عددها را دوبار ودر دوسطر زیر هم نـوشت، تنها در سطر دوم باید عددها را از جهت عکس، یعنی از آخر به اول یادداشت کرد،مثلاً

$$\begin{matrix} ۱+۲+۳+۴+۵ \\ ۵+۴+۳+۲+۱ \end{matrix} \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} ۱+۲+۳+۴ \\ ۴+۳+۲+۱ \end{matrix}$$

به این ترتیب، هردو عددی را کـه می‌خواهیم باهـم جمع کنیم، درست زیر هم قرار می‌گیرند. از جمع هر عدد با عددی که زیر آن قرار دارد، بدست می‌آید.

$$۵+۵+۵+۵=۴\times۵=۲۰ \quad \text{یا} \quad ۶+۶+۶+۶+۶=۵\times۶=۳۰$$

و این، دو برابر مجموعی است که ما لازم داریم. مجموعهای موردنظر ما، برابر با ۱۰ و ۱۵ است. در واقع

$$۱+۲+۳+۴=۱۰ \quad \text{یا} \quad ۱+۲+۳+۴+۵=۱۵$$

همانطور که می‌بینیم، این قاعده، برای هردو حالت مناسب است: باید مجموع عـدد اول (۱) و عـدد آخـر (۴) رادرتعداد جمله‌ها ضرب کنیم $۲۰=۴\times۵=۴\times(۴+۱)$ ونتیجه‌ای‌راکه بدست می‌آید نصف کنیم: $۱۰=۲:۲۰$. این‌قاعده هم روش «۱» وهم‌روش گوس را برمی‌گیرد. وقتی که مجموع $۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱$ را بدست می‌آوریم، مجموع دوجملهٔ اول وآخر برابر است با ۸؛ ایـن مجموع را در تعداد جمله‌هـا ضرب می‌کنیم، می‌شود: $۵۶=۸\times۷$، ونصف این‌حاصلضرب هم برابر است با ۲۸ . در مسألهٔ $۱۰۰+\dots+۲+۱$، مجموع عددهای اول و

آخر برابر است با ۱۰۱، اگر این عدد را در ۱۰۰ (تعداد جمله‌ها) ضرب کنیم وبه‌عدد ۱۰۱۰۰ می‌رسیم، که نصف‌آن برابر است با ۵۰۵۰.

درضمن، کلاس من‌متوجه شدکه این قاعده نه تنهابرای مجموع هررشتهٔ عددهای‌پشت سرهم،بلکه‌برای مجموع هررشته عددی که تفاوت هردوعدد پشت سرهم درآن مقداری ثابت باشد، درست است. مثلاً این روش را می‌توان درمورد مجموع

$$۵+۷+۹+۱۱+۱۳$$

هم به کاربرد (عدد نخست را می‌توان کاملاً به دلخواه انتخاب کرد). در این مجموع، هرعدد به اندازهٔ ۲ واحد از عدد قبلی بزرگتر است؛ همچنین مجموع

$$۱۰+۱۵+۲۰+۲۵+۳۰+۳۵$$

که در آن تفاوت هر دو عدد پشت سرهم، همیشه‌برابر است با ۵. دراین نمونه‌ها هم، مجموع دو جملهٔ اول وآخربرابر است بامجموع جملهٔ دوم وجملهٔ یکی مانده به آخر وغیره،در نمونهٔ اول

$$۵+۱۳=۱۸، \quad ۷+۱۱=۱۸$$

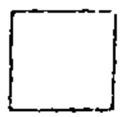
و ۹+۹، مجموع دو «جملهٔ وسط» هم‌برابر با ۱۸ می‌شود. درنمونهٔ دوم

$$۱۰+۳۵=۴۵، \quad ۱۵+۳۰=۴۵، \quad ۲۰+۲۵=۴۵$$

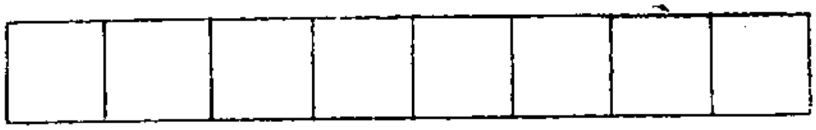
ریاضیدانها اینگونه دنباله‌ها را، که در آنها هرعدد با تفاوت ثابتی به دنبال عدد دیگرآمده است ـ تصاعدحسابی گویند.

مساحت مستطیل ومساحت مثلث

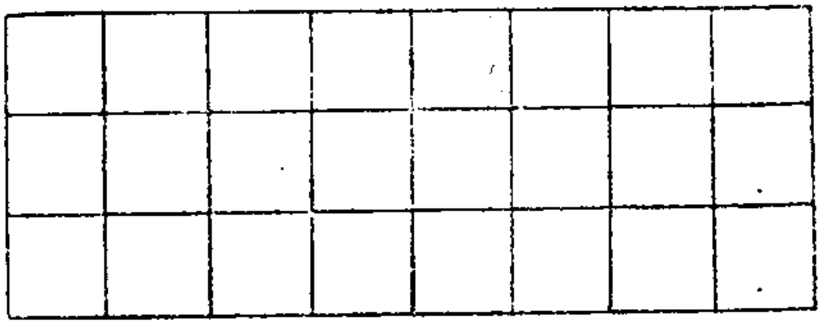
این مطلب جالب است که یك فکر درشاخه‌های گوناگون ریاضیات، پیدا شده است. مثلاً، همین روشی که برای یافتن مجموع جمله‌های یك تصاعد حسابی به‌کارمی‌رود، برای جستجوی مساحتها هم می‌تواندمورد استفاده قرارگیرد. مساحت مستطیل را خیلی ساده می‌توان پیداکرد: مربع کوچکی را به‌عنوان واحد برمی‌گزینیم و معلوم می‌کنیم، چندتا از این مربعها لازم است تاباآنها بتوان سطح مستطیل را به‌طورکامل پوشانید. فرض می‌کنیم که این مربع واحد، یك‌سانتیمتر مربع باشد، یعنی مربعی که هم طول وهم عرض آن مساوی یك سانتیمتر است:



هشت تا ازاین مربعهارا، پهلوی هم می‌چینیم:



یك مستطیل بدست می‌آید. از آنجا که این مستطیل خیلی باریك است، سه تا از این مستطیلها کنارهم قرارمی‌دهیم

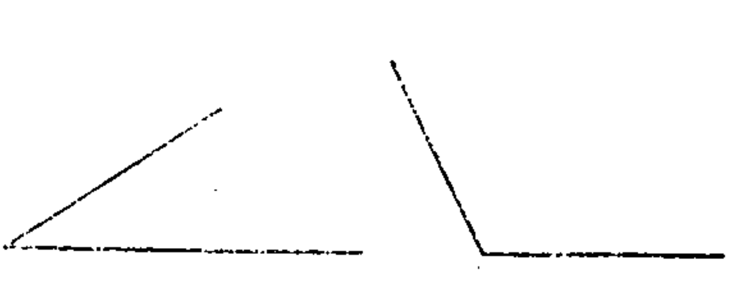


این مستطیل از ۸×۳، یعنی ۲۴ مربع درست شده است. اگـر مستطیلی داشته بـاشیم کـه طول آن ۸ سانتیمتر وعـرض آن ۳ سانتیمتر بـاشد، می‌توانیم بگوییم که در آن ۸×۳، یعنی ۲۴ مربع جامی گیرد. به‌این ترتیب است که‌قاعدهٔ کلی می گـوید: مساحت مستطیل برابر است بـا حاصلضرب دوضلع مجاور آن[1].

درگفتگوی ازمستطیل، به اینهم‌توجه می‌کنیم که ضلعهای‌مجاور آن یك زاویهٔ قائمه می‌سازند (همچنین می‌توان گفت که‌ضلعهای‌مجاور مستطیل بـرهم عمودند). مثلاً، دیوارهای خانه، زاویهٔ قـائمه تشکیل می‌دهند و ضمن ساختمان باید خیلی دقت‌کرد تا این وضع به‌وجودآید:



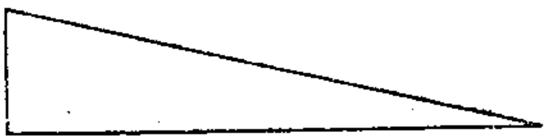
یك ضلع زاویهٔ قائمه نه به ضلع‌دیگرنزدیك شده است (مثل زاویهٔ‌حاده) ونه از آن دورشده است (مثل زاویهٔ منفرجه):



۱. به حالتی که نتوان واحد طول را بـه تعداد معینی روی‌ضلعهای مستطیل جاداد، دوباره برخواهیم گشت.

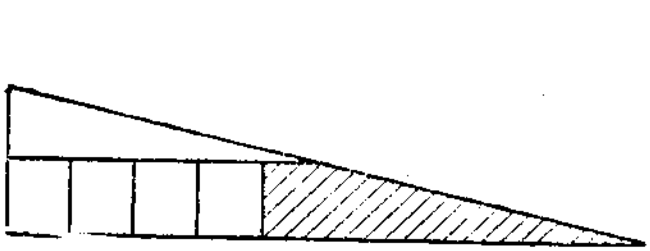
(اگـر دیـوارهـا زاویه‌هـای حاده یـامنفرجه بـاهم بسازند، به‌سادگـی فرور می‌ریزند). دوضلع زاویهٔ قائمه، نسبت به هم، درموازنهٔ پایداری هستند.

درشکلی هم که به‌وسیلهٔ سه‌خط راست محدود شده است، یعنی‌در مثلث، ممکن است زاویهٔ قائمه وجود داشته باشد، والبته تنهایکی. اگر باور ندارید، می‌توانید آزمایش کنید، همیشه دوزاویه مثلث، حاده از آب درمی‌آید:



ضلعهایی از مثلث را که زاویهٔ قـائمه تشکیل داده‌اند، ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه وضلعی راکه روبروی به زاویهٔ قائمه قرار گرفته است، وتر می‌نامیم.

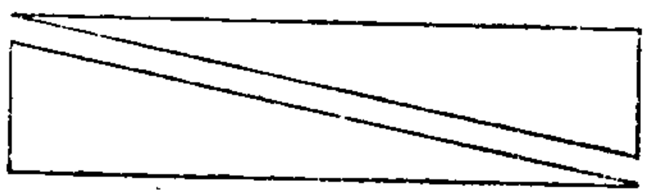
ازآنجاکه در مثلث، زاویه‌های حاده وجوددارد، چنین مثلث‌قائم الزاویه‌ای رانمی‌توان با مربعهای به‌مساحت واحد، پوشانید.



حتی در ردیف پایین هم، قسمتی باقی می‌ماند (قسمت خط خورده)، که نمی‌شودآنرا به‌وسیلهٔ مربعهای واحدپر کرد. به این‌ترتیب، به‌نظرمی‌رسد

که محاسبهٔ این مساحت، دشوارتر است.

ولی، این دشواری را می‌توان خیلی زود برطرف کرد: وقتی که نمی‌توان یك مثلث رابامربعهای واحدپوشاند، دومثلث رابا این مربعها می‌پوشانیم. دومثلث قائم‌الزاویه را طوری کنارهم می‌گذاریم که‌وترهای آنها کاملاً بریکدیگر قرارگیرند؛ یك مستطیل بدست‌می‌آید:

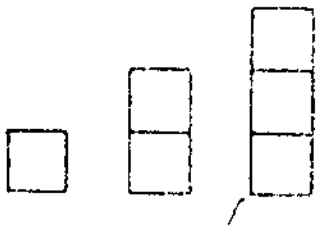


مساحت این شکل را می‌توانیم بدست آوریم: باید طول دوضلع مجاور آنرا در هم ضرب کرد. این دوضلع مجاور، چیزی جزهمان ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث نیست. ازاین راه، دو برابرمساحت مثلث بدست می‌آید، کافی است آنرا نصف‌کنیم تامساحت موردنظر پیداشود. به‌این ترتیب، راهی برای محاسبهٔ مساحت مثلث قائم‌الزاویه بدست می‌آید: دوضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آنرا درهم ضرب می‌کنیم وسپس نصف این حاصلضرب را بدست می‌آوریم.

اگرفیثاغورث را به‌خاطر آوریم، که دوهزار سال پیش یك‌رسالهٔ کامل وتمام عیار ریاضی به جهان هدیه کرده‌است، می‌توانیم به‌روشنی، شباهت بین مجموع جمله‌ها در تصاعد حسابی را با آنچه‌که هم اکنون گفتیم، پیداکنیم. اقلیدس، همهٔ مفهومهای حساب را به‌صورت هندسی توضیح می‌داد. او به‌جای عددهای پشت سرهم

۱، ۲، ۳، ...

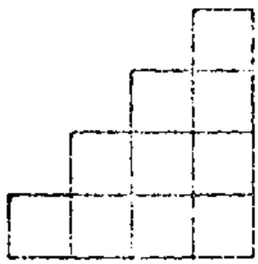
دنبالهٔ این شکلها را در نظرمی‌گرفت:



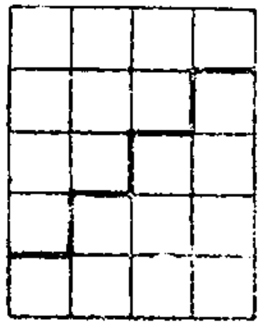
به‌همین مناسبت، مجموع

۱+۲+۳+۴

برای او، به‌صورت این مثلث پله‌کانی درمی‌آمد:



باهمان روشی‌که همین مجموع را بـه ترتیب عکس، زیریا بالای آن می‌نوشتیم، دراینجا هم می‌توان مثلث پله‌کانی دیگری ازهمین نوع را روی آن قرار داد:



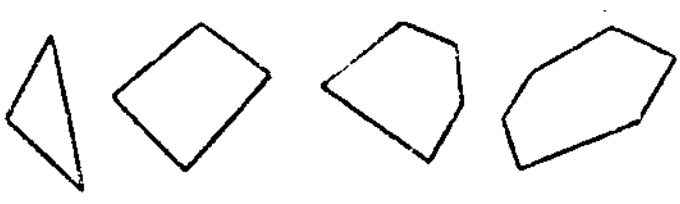
به‌این‌ترتیب، ۴روی۱؛ ۳روی۲؛ ۲روی۳و۱روی۴قرارمی‌گیرد. درهرستون ۵ مربع وبنابراین رویهم $۵ \times ۴ = ۲۰$ مربع وجود دارد. و این کاملاً شبیه اینست‌که بگوئیم مستطیل به‌طول چهار واحد وبه‌عرض پنج‌واحد است، وبنابراین، مساحت آن شامل ۵×۴ واحد «مساحت» است. ایـن مقدار، برابر با دو برابر مجموع مورد نظر ماست. مجموع مورد نظر ما مساوی نصف ایـن مقدار و مساحت مثلث پله‌کانـی هم مساوی نصف مساحت این مستطیل است. این نمونه به خوبی نشان می‌دهدکه چگونه ممکن است یك مفهوم، یکبادرحساب وباردیگردر هندسه، به کار رود. وما بارها و بارها، به این موضوع برخورد خواهیم کرد.

۵. دگرگونیهایی در زمینهٔ اصلی

قطرهای چندضلعیهای محدب

درکجا ممکن است جمع عددهای پشت سرهم، باشروع از ۱،لازم شود؟ در مسأله‌ها وموردهایی به این موضوع نیاز پیدا می‌شود، که در ظاهر امر هیچ بستگی بین آنها دیده نمی‌شود.

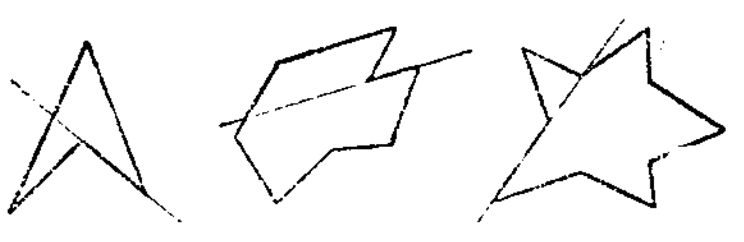
ما در بارهٔ مثلثها وچهار ضلعیها، گفتگو کرده‌ایم. به‌طور کلی، به شکلی که به وسیلهٔپاره خطهای راست محصور شده‌باشد، چندضلعی گوییم:



چندضلعیهایی که در اینجا رسم کرده‌ایم، چند ضلعیهای محدب نامیده می‌شود. در هیچکدام از آنها، فرورفتگیهایی، آنطور که در چندضلعیهای زیر دیده می‌شود، وجود ندارد:



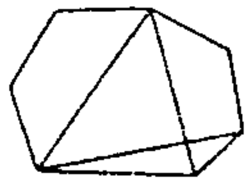
این دو گروه چندضلعی را به‌این ترتیب از هم جدا می کنند که چندضلعی مربوط به گروه دوم باامتداد بعضی از ضلعهای آن بریده می‌شود، در حالیکه برای چندضلعیهای گروه اول، این ویژگی وجود ندارد:



خودتان آزمایش کنید، می‌بینید که برای چند ضلعیهای گروه اول، چنین خاصیتی وجود ندارد. از این به‌بعد ما تنها در بارهٔ چندضلعیهای محدب گفتگو خواهیم کرد.

پاره‌خطی که دوراس‌غیرمجاور یك چندضلعی را به هم می‌پیوندد، قطرچند ضلعی نامیده می‌شود (پاره‌خطی که دو رأس مجاور را به هم می‌پیوندد، همان ضلع چند ضلعی است). چندقطر یك‌چندضلعی را رسم

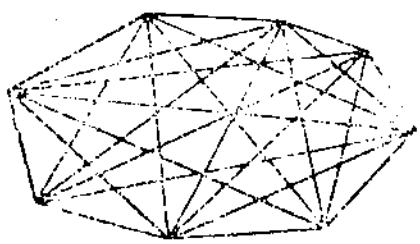
می کنیم:



حالا، این پرسش را درنظر می‌گیریم: در یك چندضلعی مفروض، ومثلاً در یك هشت ضلعی ،چندقطر می‌توان رسم کرد؟

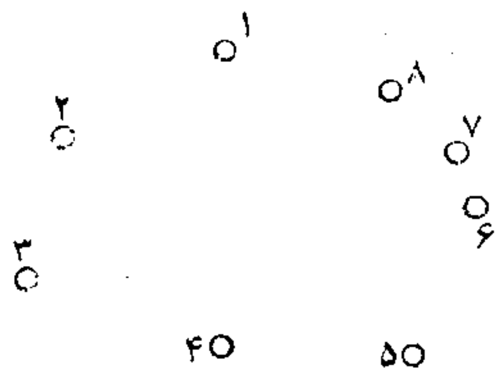
دو راه وجود دارد.

اگر حتی تمام قطرهای چندضلعی را رسم کنیم، شمردن آنها کار خیلی ساده‌ای نیست، زیـرا بـه‌صورت درهم وانبوهی، سطح چندضلعی راپوشانده‌اند.



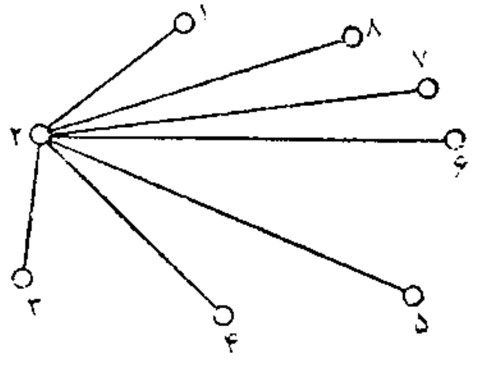
ولی می‌توان مسأله را بـه این ترتیب ساده‌کرد کـه در ابتدا بین راسهایی‌که به هم می‌پیوندیم و راسهایی که به هم نمی‌پیوندیم، تفاوت نگذاریم، به‌زبان دیگر، ضلعها را هم جزو قطرهای چندضلعی به‌حساب آوریم. وقتی‌که ما می‌دانیم که‌تعداد ضلعها مساوی هشت است، آنوقت کافی است از نتیجه‌ای که بدست می‌آوریم، این عدد ۸ را کم‌کنیم.

حالا، مسأله به اینصورت درمی‌آید. ما هشت ضلعی را دراختیار داریم:

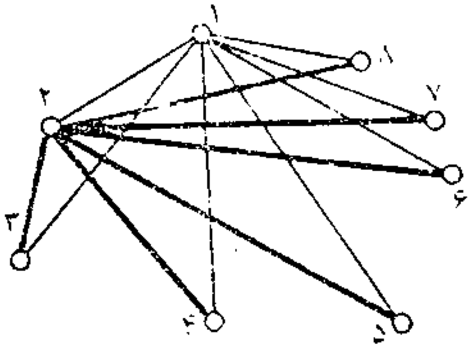


ومی‌خواهیم بدانیم، به‌چند طریق‌می‌توان این نقطه‌ها را به‌هم وصل‌کرد؟ دوراه وجود دارد.

ابتدا می‌توانیم یکی از نقطه‌ها را به‌همهٔ نقطه‌ها وصل کنیم و به این ترتیب هفت پاره خط بدست آوریم:



سپس، نقطهٔ بعدی را به‌دیگر نقطه‌ها وصل می‌کنیم (یعنی به نقطه‌هایی که بار اول به این نقطهٔ دوم وصل نشده‌اند)؛ بنابراین، علاوه بر ۷پاره خط اول که درگام اول بدست آوردیم، ۶ پاره خط دیگر اضافه‌می‌شود:



حالا، نقطهٔ سوم را به نقطه‌های دیگر وصل می‌کنیم (به جز نقطه‌های اول ودوم، که قبلاً وصل شده است) و ۵ پاره خط تازه بدست می‌آوریم. به همین ترتیب، ازوصل نقطهٔ چهارم به نقطه‌های باقیمانده، ۴ پاره خط،از وصل نقطهٔ پنجم، ۳ پاره خط، ازوصل نقطهٔ ششم، ۲ پاره خط واز وصل نقطهٔ هفتم، ۱ پاره خط جدید پیدا می‌شود. نقطهٔ هشتم، خود به خود، به همهٔ نقطه‌های دیگر پیوسته است و بنابراین پاره خط تازه‌ای بدست نمی آید. در نتیجه بدست می‌آید:

$$۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱$$

ویا اگر به ترتیب عکس بنویسیم:

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷$$

راه دیگر اینست که معلوم کنیم هر رأس را با چند پاره خط می‌توان به رأسهای دیگر وصل کرد. روشن است که تعداد این پاره‌خطها برابر است با ۷: هررأس را می‌توان به هفت رأس دیگر وصل کرد.

در اینجا ممکن است گرفتار یك اشتباه بشویم: چون از هر رأس می‌توان به هفت رأس دیگر وصل کرد، بنابراین رویهم به‌اندازهٔ ۸×۷ یعنی ۵۶ پاره خط وجود دارد. ولی این نتیجه‌گیری نادرست است، زیرا

هرپاره خط،که دوراس را به هم وصل می‌کند، دوبار به حساب می‌آید. مثلاً دو رأس۱و۶دوبار به هم وصل شده‌اند، یکبار وقتی که رأس ۱ را به دیگر رأسها وصل کرده‌ایم و بار دوم، وقتی که رأس ۶ را به‌بقیهٔ رأسها پیوسته‌ایم. به‌این ترتیب، اشتباه ما دراینجاست که هر پاره‌خطرا دوبار به حساب‌آورده‌ایم. پاسخ درست، ازاینجا بدست می‌آیدکه‌نتیجهٔ قبلی را نصف کنیم: ۲۸ = ۲ : ۵۶.

هردو راه، باید به یك نتیجه برسد؛ بنابراین مجموع

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷$$

برابر استبانصف حاصلضرب ۷ × ۸. واین، همان روشی است‌که‌شاگرد من (۱)، آنرا پیدا کرده بود.

ترکیبهای دوعضوی

زمینهٔ مورد بررسی را می‌توان‌کمی‌تغییر داد ومسأله رابه‌صورت دیگری‌تنظیم کـرد. چون هرپاره‌خط، دوراس را به‌هم‌می‌پیوندد،حق‌داریم این‌پرسش‌را،بکنیم. ازهشت‌رأس‌به‌چندطریق می‌توان دورأس را انتخاب کرد؟ضمناً، بهیچوجه لازم نیست‌که اینها، رأسهای یك‌چند ضلعی باشند.

همچنین می‌توان این پرسش را طرح کرد: به چند طریق می‌توان دوتوپ را از بین هشت توپی که رنگهای مختلف دارند، جداکرد.؟

یا اینکه، به چندطریق مـی‌توان نخستین زوج را از بین هشت بچه، انتخاب کرد؟

ریاضیدانها، همهٔ‌اینگونه‌پرسشها را، به‌این ترتیب‌تنظیم می‌کنند: چند ترکیب دوعضوی می‌توان از هشت عضو تشکیل داد؟

اگر این عضوها را بـا عـددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ و ۸ نشان دهیم ، ترکیبهای دوعضوی (یا به‌طور خلاصه، زوجهایی) که از آنها تشکیل می‌شود، چنین است:

۱۲	۲۳	۳۴	۴۵	۵۶	۶۷	۷۸
۱۳	۲۴	۳۵	۴۶	۵۷	۶۸	
۱۴	۲۵	۳۶	۴۷	۵۸		
۱۵	۲۶	۳۷	۴۸			
۱۶	۲۷	۳۸				
۱۷	۲۸					
۱۸						

با این ترتیبی که نوشتیم، روشن است که تعداد ترکیبها (از راست به چپ) برابر است با

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷$$

در اینجا هم ، راه حل دیگری‌برای مسأله وجود دارد؛ هر عنصر می‌تواند با یکی از ۷ عنصر دیگر، یـك زوج‌تشکیل دهد. بنابراین برای ۸ عنصر، ۸ × ۷ زوج بدست می‌آید. ولی بااین روش هرزوج را دوبار به حساب‌آورده‌ایم، زیرا درهرزوج،یکبار اولی را بادومی ویکباردومی را بـا اولی متحد کرده‌ایم. بـه‌این ترتیب، بـاید حاصلضرب ۸ × ۷ را نصف کنیم تا پاسخ پرسش خود را بدست آوریم.

دستورها

باوجودی که از جاهای به‌کلی متفاوت‌آغاز کردیم، نتیجه‌ای که بدست آوردیم، کاملاً یکی بود. ومن‌نمی‌توانم در برابر این وسوسه‌که

این نتیجه گیری یگانه را می‌شود به‌یاری یك دستوربیان کرد، پایداری کنم.ولی پیش از آن می‌خواهم توجه خواننده رابه‌نکته‌هایی جلب‌کنم. پرانتز درزبان ریاضیات، به معنای این نیست‌که می‌خواهیم، به‌خواننده توضیحی اضافه‌بدهیم،آنطورکه‌درزبان معمولی‌رایج‌است. در ریاضیات، آنچه را که داخل پرانتز قرار می‌دهند، به معنی به هم پیوستن‌آنهاست. مثلاً ۶×(۳+۲) به این معناست که باید نتیجهٔ جمع ۳+۲، یعنی ۵ را در ۶ ضرب کنیم؛ درحالیکه عبارت بدون پرانتز ۶×۳+۲ به این معناست که باید حاصلضرب ۶×۳ را به ۲ اضافه کنیم (بنابرقرارداد عمل ضرب «نیرومندتر» از عمل جمع است و بنابراین لزومی ندارد به شکل (۶×۳)+۲ نوشته شود). هرکسی می‌داند که نصف عددهای ۴ ، ۶و۱۰ را می‌توان به صورت $\frac{۴}{۲}$ ، $\frac{۶}{۲}$ و $\frac{۱۰}{۲}$ نوشت؛تقسیم راهم می‌توان به صورب همین «کسرها» نوشت.

حالا،آخرین عدد مجموعی‌که با شروع از۱ ، پشت‌سرهم‌آمده‌اند، به n نشان می‌دهیم. مجموع دو جملهٔ اول آخر، برابر n+۱ می‌شود. این مجموع راباید درتعداد جمله‌ها، یعنی n ، ضرب وسپس حاصلضرب را بر ۲ تقسیم کنیم. به این ترتیب می‌توان همهٔ انواع حالتهایی را که بررسی کردیم، با این دستور نشان دهیم:

$$۱+۲+۳+\ldots+n=\frac{(۱+n)n}{۲}$$

ریاضیات، یعنی زبان خاصی که تنها از یك نوع نشانه گذاری استفاده می‌کند. در دستوری که نوشته می‌شود، نشانه‌ها هیچ معنای خاص و یا محتوی معینی ندارند. هرکسی می‌تواند به این دستور، هر

مفهومی‌راکه‌خودش می‌خواهد،نسبت‌بدهد: برای کسی،به‌معنای‌جستجوی تعداد قطرهای‌یك چند ضلعی‌وبرای دیگری،به‌معنای‌تعدادانواع‌ترکیبهای دوتایی است. وتا چه اندازه خوشحال‌می‌شویم، وقتی که‌توانسته‌ایم‌تعداد زیادی از مسأله‌ها را به‌صورت یك دستور نشان دهیم.

هندسهٔ بدون اندازه‌گیری

در استدلالهای قبلی‌ما، دو انگیزه وجود داشت-هندسی‌وحسابی. بازهم کمی به انگیزهٔ هندسی بپردازیم.

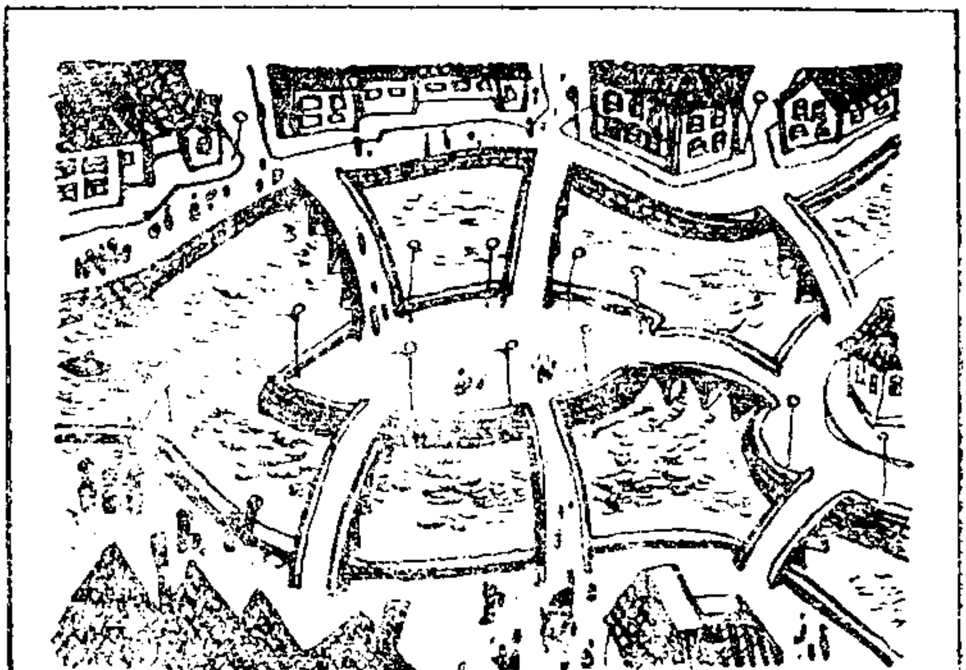
دوباره به شکلی که هشت ضلعی را با همهٔ قطرهای آن نشان می‌دهد، نظری بیندازید. این شکل خیلی درهم وبرهم است، زیرا قطرها در هم فرو می‌روند ویکدیگر را قطع می‌کنند ونقطه‌های برخورد، خیلی ساده از جلو چشم درمی‌روند. با وجود این، ما با وضع خوبی سرکار داریم، زیراچند ضلعی‌ما محدب است و دست‌کم رأسها در بیرون‌قرار گرفته‌اند وبا نقطه‌های برخورد قطرها، مخلوط نمی‌شوند. اگر هرقطر به صورت یك نخ لاستیکی به دو راس محکم شده بود و می‌توانستیم آنرا به طرف بالا بکشیم، شکل روشن‌تر وساده‌تر دیده می‌شد. یك قطر را در نظر می‌گرفتیم، قطر دوم رابالاتر ازآن قرار می‌دادیم، قطر سوم را بالای قطر دوم و به‌همین ترتیب، به نحوی‌که هیچکدام ازآنها باهم‌برخوردی نداشته باشند. درچنین صورتی، شمردن قطرهاساده می‌شد؛ زیراوقتی‌که قطرها را بکشیم و «درازتر» کنیم، تعداد آنها، تغییر نمی‌کند.

مکان شناسی (توپولوژی)

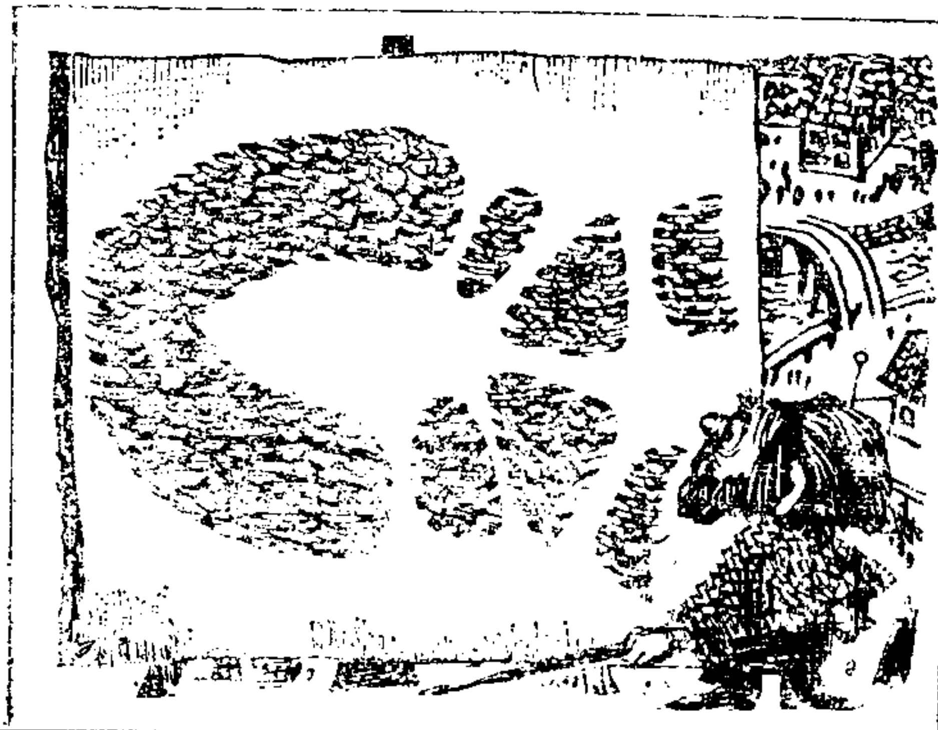
شاخه ویژه‌ای در هندسه وجود داردکه‌کارآن بررسی خاصیتهایی از شکل است که اگر شکل را از لاستیك درست کرده باشیم وآنرا به‌هر

اندازه که بخواهیم به‌هم بفشاریم و یا از هم باز کنیم، این خاصیتها تغییر نکند. این شاخه هندسه‌را توپولوژی (مکان شناسی)می‌نامند. این موضوع جالب است که باوجود آنکه در این دانش نمی‌توان از اندازه گیری گفتگو کرد (زیرا وقتی که سطح شکل به هم فشرده و یا از هم بازمی‌شود، هم اندازه‌های خطی وهم مقدار زاویه‌ها، تغییر می‌کند)، باز هم قسمتی ازهندسه است. برای ما، این مطلب اهمیت خاصی دارد که‌از زمان پیدایش توپولوژی، مدت زیادی نمی‌گذرد وما سرچشمهٔ به وجود آمدن آنرا می‌دانیم. ما می‌توانیم‌با چشمهای خود ببینیم که چگونه‌ازیك بازی ساده، شاخهٔ کاملی از ریاضیات ، پیدا شده است.

این بازی، صورت معمایی دارد و به پل کینگسبورگ (کالینینگراد امروزی) مربوط می‌شود. دوجزیره در رودخانهٔ پرگل در کالینینگراد ، به وسیلهٔ هفت پل ، به هم وبه ساحل مربوط شده‌اند:

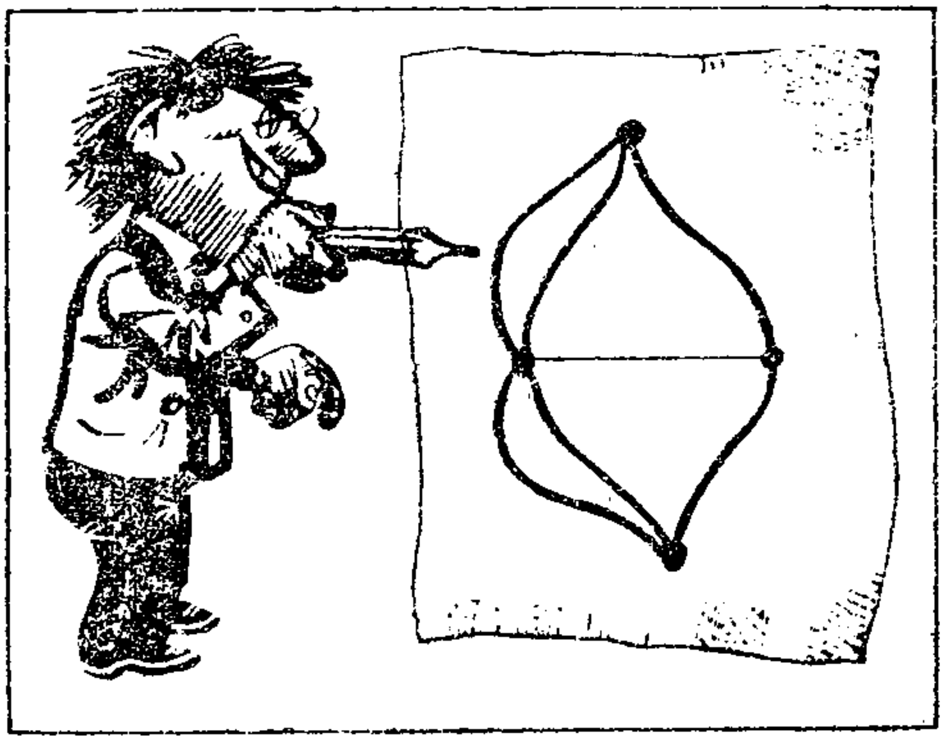


باید به این پرسش،پاسخ داد: آیا می‌توان ازیك نقطهٔ دلخواه شهر خارج شد، ازروی همهٔ پلها عبورکرد ودوباره به‌همان جای اول رسید،به‌نحوی که از روی هرپل تنها یکباربگذریم؟ تلاش کنید این مساله را حل‌کنید. خیلی زود می‌توان متوجه این مطلب شدکه اگر همه پلهایی که به یك ساحل یا به یك جزیره می‌روند، دریك نقطه به هم برسند، مسأله تغییری نمی کند (تنها در اینصورت، گردش در خشکی حذف مـی‌شود)؛ یعنی، اگر طرح به این صورت باشد:

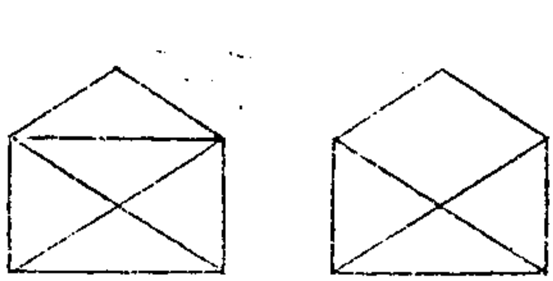


این‌وضع به‌ما اجازه می‌دهد تاطرح ساده‌ای‌بکشیم(شکل‌بالای صفحهٔبعد):

حالا می‌توانیم مسألهٔ خودرا به‌این ترتیب طرح‌کنیم: آیا می‌توان این شکل با «یك‌حرکت قلم» وبدون اینکه مداد را از کاغذ جداکنیم، رسم کنیم (کما اینکه، وقتی کسی گـردش خود را از روی پلها انجام می‌دهد، هرگز به‌هوانمی‌پرد)؟ ضمناً هیچ خطی را نباید دوبار رسم‌کنیم



ودرآخر کار هم باید به همان نقطهٔ نخستین برسیم. مسأله‌هایی ازاین قبیل برای شما تازگی ندارد، چه‌کسی از شما، چنین پاکتهایی را رسم نکرده است:



روشن‌است که‌چنین‌پرسشهایی،به شاخهٔ‌توپولوژی مربوط می‌شود. اگر فرض کنیم که این شکل از لاستیك درست شده است وما بتوانیم آنرا از اطراف بکشیم یا به هم بفشاریم وبه طور خلاصه به هرنحوی‌که بخواهیم تغییر شکل بدهیم، در پاسخ به این پرسش که آیا می‌توانیم

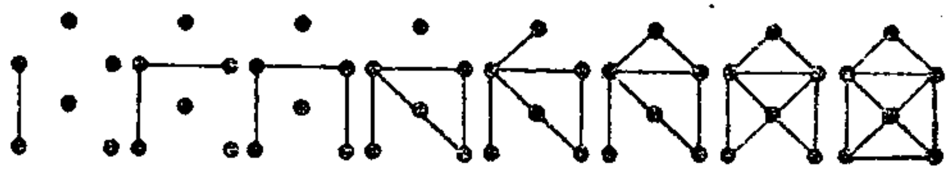
شکل را با یك حرکت قلم رسم‌کنیم یا نه، تغییری نمی‌دهد؛ تنهانمی‌توانیم آنرا پاره کنیم وقسمتهای جداگانه آنرا به هم بچسبانیم.

لئوناداولر، ریاضیدان بزرگ، پاسخ‌کلی پرسشهایی ازایـن قبیل را پیدا کرده است. وقتی کـه یك شکل را بتوانیم با حرکت یك قلم رسم‌کنیم، به‌نحوی که دوباره به‌نقطه‌نخستین‌برگردیم، به ایـن‌معناست که ابتدا مدادازنقطهٔ‌نخستین‌خارج‌می‌شود، وسپس‌به‌همان‌نقطه‌برمی‌گردد. ضمن دور زدن شکل، هرچند بارکه مداد به یك رأس می‌رسد، به همان تعدادهم ازآن خارج می‌شود، تا اینکه‌بتواند حرکت خود را ادامه دهد. بنابراین، هرخطی که به‌یك نقطه وارد می‌شود، متناظر با خطی است که از همین‌نقطه خارج می‌شود؛ به‌این ترتیب باید در هررأس، تعداد زوجی خط به هم رسیده باشند. می‌توان ثابت‌کردکه این شرط،کافی هم‌هست. اگر تعداد خطهایی که در هررأس شکل به هم رسیده‌اند، زوج باشد، در اینصورت همیشه می‌توانیم چنین شکلی را بایك حرکت قلم رسم کنیم به نحوی که سرآخر به‌نقطهٔ نخستین برسیم.

به این ترتیب، گـردش در کالیینگراد ممکن نیست، زیرا تعداد خطهایی که در رأس سمت چپ به‌هم رسیده‌اند برابر ۵ ودر دیگررأسها برابر ۳ است، یعنی درهمه جا تعداد خطها، عددی فرد است.

اما، در بارهٔ رسم پـاکتها، پاکت اول را می‌توان با یك حرکت قلم رسم کرد، به شرطی که از فرض رسیدن به‌نقطه نخستین، صرفنظر کنیم. در رأسهای بالای مستطیل، ۴ خط به هم رسیده‌اند، در بـالاترین رأس، دو خط ودرمرکز مستطیل، ۴ خط. در همهٔ این حالتها، تعدادخطها زوج است، ولی کار در دورأس پایین خراب می‌شود، زیرا در هرکـدام از این دو رأس سه خط به هم رسیده‌اند ولی، اگر موافقت کنیم که‌آغاز

رسم شکل از یك رأس وپایان آن در رأس دیگری باشد، می‌توانیم بایك حرکت قلم، وبه ترتیب زیر، آنرا رسم کنیم:



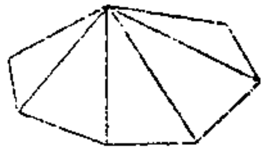
پاکت دوم، حالت‌نومیدکننده‌ای‌است، زیرا درآن، تعداد رأسهای خارج از قاعده، بیش از دوتاست. در رأس بالا و درمرکز پاکت، تعداد خطهایی که به هم رسیده است، زوج است، ولی درهر یك از چهاررأس دیگر، ۳ خط به هم رسیده‌اند.

و این همان بازی است که توپولوژی را به وجود آورده است. ولی، نباید گمان کردکه توپولوژی به همین سرگرمیها محدود می‌شود، امروزه این شاخهٔ ریاضیات چنان پیشرفت کرده که به صورت یکی از رشته‌های مهم دانش در آمده است. توپولوژی در سایر رشته‌های‌دانش هم کاربردهای زیادی پیدا کرده است؛ مثلا، درفیزیك‌برای بررسی‌عبور جریان از هادیها ودرشیمی برای ساختن مدلها ونمونه‌های ملکولی، به توپولوژی نیازدارند. به‌طورکلی، روشهای توپولوژی، همیشه درجاهایی پدیدار می‌شود که سروکار ما با نوعی از ساختمان یـك شیء باشد که‌به اندازه‌های آن توجهی ندارد.

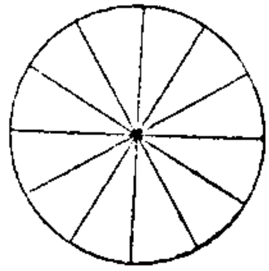
تساوی و تشابه

حالا ، کمی در این باره‌گفتگو می‌کنیم که درتوپولوژی چه مفهومهایی از هندسه را کنار می‌گذارند. به عنوان نمونه، مفهومهای تساوی وتشابه

از اینگونه‌اند. به خصوص تساوی و تشابه‌مثلثها نقش عمده‌ای درهندسه دارند، زیرا هرشکلی را می‌توان به مثلثهایی تبدیل کرد؛ مثلاً یك چند ضلعی به کمك قطرهایش به مثلث تبدیل می‌شود:

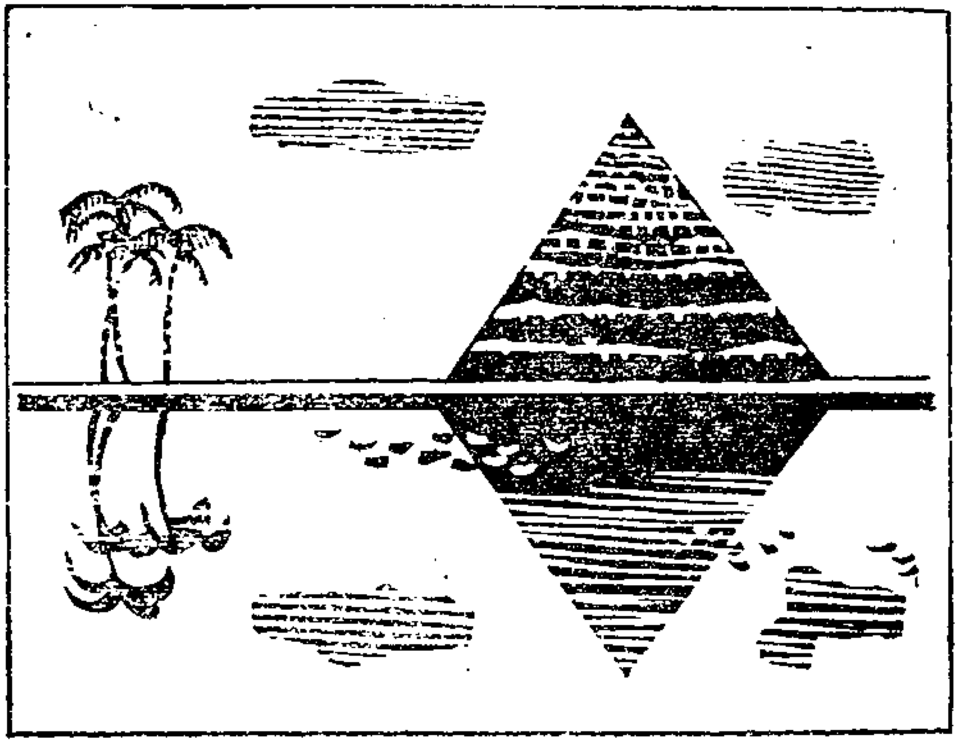


حتی دایره رامی‌توان، بامقداری گذشت به‌صورت شکلی در نظرگرفت، که ازمثلثها تشکیل شده است(مابعداً دوباره به‌این مطلب برمی‌گردیم)، تنها لازم است که شعاعها را به اندازهٔ کافی نزدیك به هم رسم کنیم :



در اینصورت، هرکمان، به تقریب به صورت یك پاره خط راست به‌نظر می‌رسد. (من می‌دانم که در درس ریاضی، وقتی از کلمه «بـه تقریب» صحبت می‌شود،آنرا احساس نادرستی می‌دانندکه به‌تردید ودودلی منجر می‌شود، ولی من به موقع خود مفهوم دقیق این حالت را روشن خواهم کرد.)

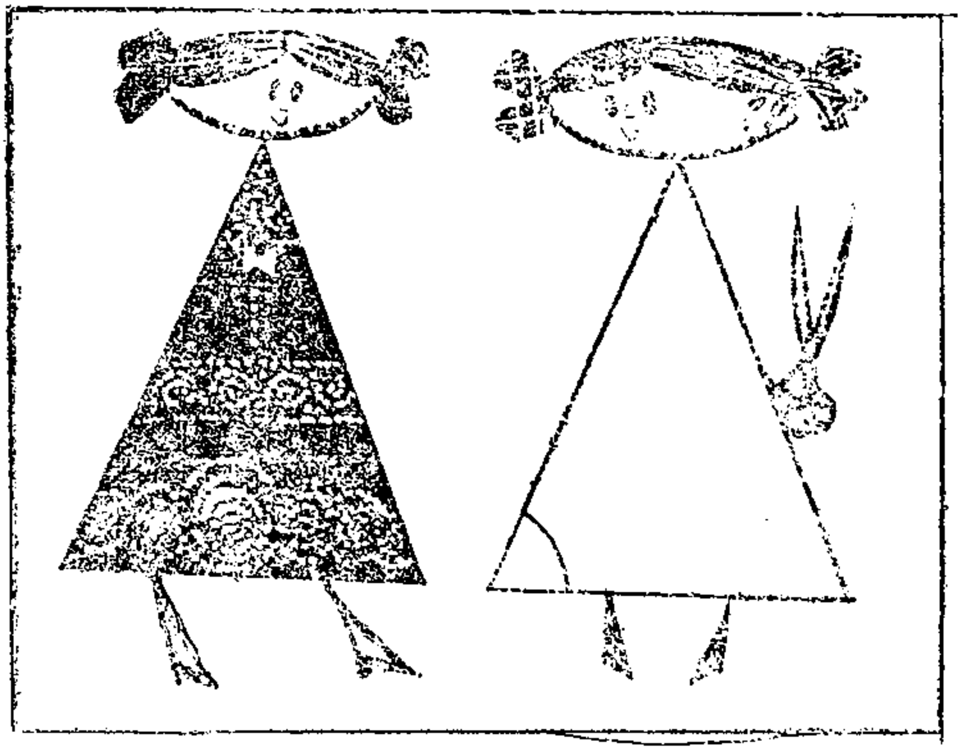
دومثلث را برابرگویند، وقتی‌که بتوان یکی از آنها را بردیگری قرار داد، به نحوی که به‌طورکامل آنرا بپوشاند. مثلاً، دومثلثی‌که‌در این شکل می‌بینید، دارای این خاصیت هستند:



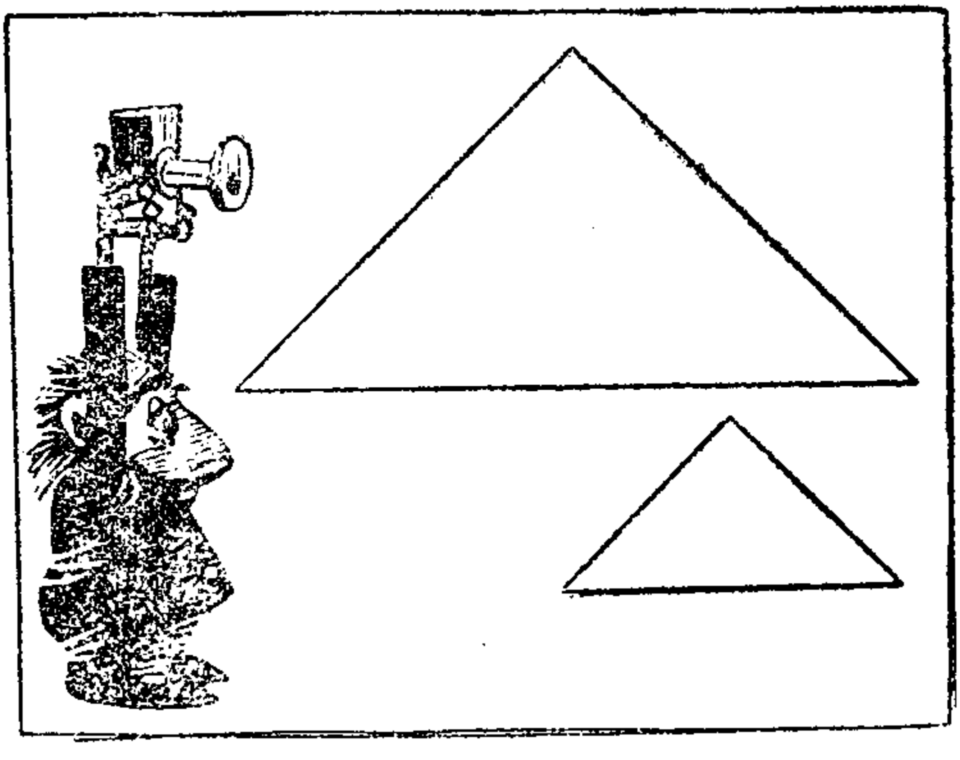
اگر این مثلثها را از صفحه کتاب جداکنیم و رویهم قرار دهیم، تساوی آنها روشن می‌شود. وقتی که این دو مثلث را رویهم قرار دهیم، اجزاء آنها کاملاً بریکدیگر قرار می‌گیرند، تعداد این اجزاء درمثلث مساوی ۶ است (۳ زاویه و ۳ ضلع). ولی برای این تساوی، کافی است سه‌تااز این اجزاء برهم منطبق شوند، مثلاً دوضلع وزاویه‌ای‌که بین آنها قرار گرفته است (شکل اول صفحهٔ بعد را ببینید):

در چنین صورتی، اگر دوزاویه مساوی را رویهم قرار دهیم، انتهای‌دو ضلعی که در دوطرف این زاویه قرار گرفته‌اند بر انتهای ضلعهای نظیرشان درمثلث دیگر واقع می‌شود، ضلع سوم مثلث اول از این دو نقطهٔانتهایی می‌گذرد وبنابراین چاره‌ای‌ندارد جزاینکه برضلع سوم‌مثلث دوم منطبق شود.

دردومثلث‌متشابه،وقتی که‌به‌یك شکل‌باشند. ولواینکه اندازه‌های



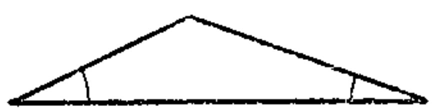
مساوی نداشته باشد؛ می‌توان یکی از مثلثها را با کوچکتر شدن دیگری بدست آورد:



مثلاً می‌توان فرض کرد که از مثلث بزرگتر عکس گرفته‌ایم وتصویـر کوچکتر آنرا در پایین بدست آورده‌ایم. طول ضلعهای مثلث کوچکتر را به هر اندازهٔ که‌بخواهیم، می‌توان در نظر گرفت، زیرا دوربین عکس برداری اجازه می‌دهد که تصویر آنرا به دلخواه کوچك کنیم. تنهاباید توجه کنیم که دوربین، تصویر راتحریف نکند؛ کـه هر دو ضلع مثلث به‌یك‌اندازه کوچك شودووضع آنهانسبت‌به‌هم‌تغییرنکند،که در اینصورت زاویه‌های مثلث تغییر نمی‌کند.

می‌بینیم که‌دردومثلث‌متشابه، ضلعهابه‌یك نسبت‌بزرگ یاکوچك می‌شود (وبـه طـور خلاصه، ضلعها متناسب‌انـد)، ولی زاویه‌هـا تغییر نمی‌کند.

با وجود این، برای تشابه دو مثلث کافـی است کـه زاویه‌های نظیر آنها برابر باشد. به این ترتیب،اگر بخواهیم مثلثی متشابه با ایـن مثلث بسازیم:

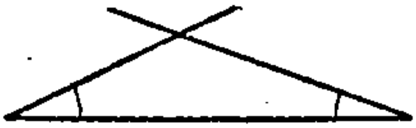


یکی ازضلعهای مثلث دوم ومثلاً ضلع پایینی‌آنرا به اندازهٔ دلخواه‌رسم می‌کنیم:

وسپس در دو انتهای این پاره خط، مساوی زاویه‌های پایینی مثلث اول قرار می‌دهیم:

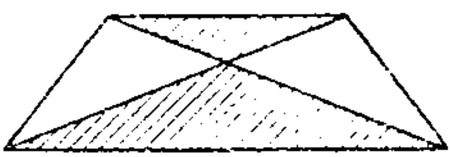


اجزاء دیگر این مثلث دوم را دیگر نمی‌توانیم به دلخواه انتخاب کنیم، زیرا اگر ضلعهای دوم این زاویه‌ها را ادامه دهیم، مثلث کامل مورد نظر ما بدست می‌آید:



واین همان مثلثی است که با مثلث اصلی مامتشابه است. به‌همین‌مناسبت است که درمثلثهای متشابه، تنها گفتگو از دو زاویهٔ برابر است.

در هرگامی که درهندسه برمی‌داریم، به‌شکلهایی برمی‌خوریم که یا با هم‌برابرند و یامتشابه بایکدیگرند. مثلاً، درذوزنقهٔ متساوی‌الساقین که در اینجا رسم کرده‌ایم، مثلثهای سفید با هم برابر (یعنی می‌توان آنها را برهم متطبق کرد) ومثلثهای خط خورده متشابه‌اند.



ولی، در توپولوژی هیچ گفتگویی از برابری یا تشابه شکلها وجود ندارد، زیرا انبساط وانقباض، هم اندازه‌ها وهم‌نوع شکل‌راتغییرمی‌دهد. در توپولوژی، خطهای راست ممکن است به خطهای منحنی تبدیل شوند ویا حتی از صفحه «خارج» شوند.

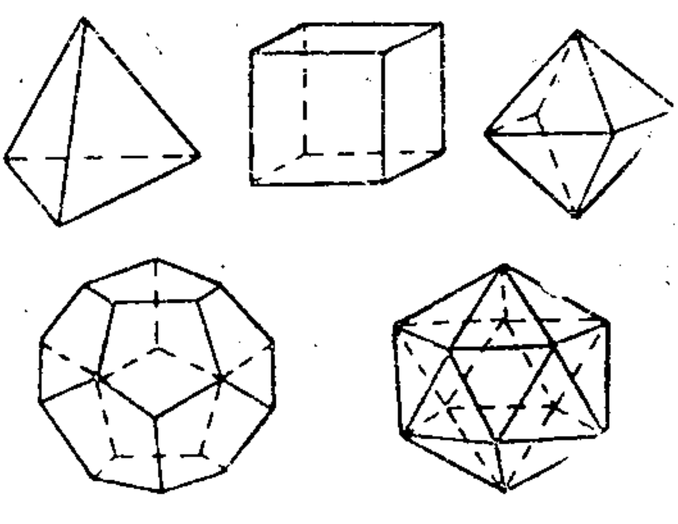
چند وجهیهای منتظم

این موضوع بسیار جالب است که توپولوژی می‌تواند به پرسش موبوط به تعداد چند وجهیهای منتظم، پاسخ گوید، اگر چه مفهوم «منتظم»، دقیقاً به‌انطباق واندازه‌بستگی دارد. چندوجهی منتظم، به‌جسم

محدبی گفته می‌شود که به‌چند ضلعیهای منتظم مساوی، محدود شده‌باشد چند ضلعی هم وقتی منتظم است که ضلعها وزاویه‌های برابر داشته‌باشد:



همهٔ چندضلعیهایی که وجه‌های چند وجهی منتظم را به‌وجود آورده‌اند، باهم برابرند وتعداد این چندضلعیها که در هررأس چند وجهی به هم رسیده‌اند،برای تمام رأسها، یکی است. وقتی که توپولوژی این مسأله‌را حل می‌کند، تنها به این ویژگی‌چندوجهیهای منتظم‌توجه داردکه اولاً تعداد ضلعها برای چند ضلعیهای تشکیل دهندهٔ آن، ثانیاً تعدادیالهایی که به هررأس رسیده است، مقدار ثابتی است. و این ویژگی هیچگونه ارتباطی به اندازه‌ها و شکل جسم ندارد. باروشهایی که در توپولوژی معمول است، می‌توان ثابت کرد که این شرطهای ساده، تنها با ۵ نوع مختلف چند وجهی می‌سازد. درهندسهٔ متری عادی هم ثابت می‌کنندکه تنها ۵نوع مختلف چندوجهی منتظم‌وجوددارد. سه‌تاازاین‌چندوجهیهای منتظم ازمثلثها،یکی ازچهار ضلعیها (این چندوجهی راهمه می‌شناسیم وآن مکعب است) وبالاخره یکی از پنج‌ضلعیها درست شده است:



این کشف، بیشتر ازاین جهت شگفت‌انگیز است که برای ساختن چند ضلعیهای منتظم در روی صفحه، هیچ محدودیتی وجود ندارد و هر نوع چندضلعی منتظم را با هرتعداد ضلع که‌بخواهیم، می‌توان رسم کرد. چندضلعیهای منتظمی را که درصفحهٔ پیش رسم کرده‌ایم، می‌توانیم تا هرجا که مایل باشیم، ادامه دهیم. به‌این ترتیب، قانونی وجود نداردکه ضمن‌گذار از صفحه بـه فضا، تغییرنکند؛ معلوم مـی‌شود کـه در فضا، قانونهایی حکومت می‌کند که دربسیاری موارد به‌کلی غیر ازقانونهای مربوط به صفحه است.

به این موضوع بیشتر بپردازیم. همه چیز گواه براینست که در فضا، به پدیده‌های تازه‌ای برخورد می‌کنیم، زیـرا حرکت در فضا خیلی آزادتر از حرکت در صفحه است؛ واین به‌ویژه ما را امیدوار می‌کندکه وقتی امکان بیشتری داریم،بتوانیم با چند وجهیهای‌منتظم گوناگونتری نسبت به صفحه، برخورد کنیم. ولی، به‌عنوان یك قانون، به این نکته هم بایـد تـوجه داشت کـه امکان بیشتر ، قیدهای بیشتری را هم طلب می‌کند (یعنی امکان بیشتر دو رویه دارد، رویهٔ مثبت آن وجود امکان بیشتر ورویهٔ منفی‌آن ، طلب شرطهای بیشتراست). آزادی بیشتر،همراه با تعهدات بیشتر است. در رأسهای یك شکل مسطحه، تنها دو ضلع به‌هم می‌رسد، در حالیکه دررأس یك جسم ممکن است سه‌یال یا بیشتر به هم رسیده‌باشد؛همچنین درچنین رأسی،تعداد وجه‌هایی هم‌که به‌هم‌رسیده‌اند می‌تواند دلخواه باشد. مثلاً، حتی ممکن است در یـك رأس، ۳۰ یال و در رأس دیگر، ۳ یال به‌هم رسیده باشند، ودراینصورت یکی از وجه‌ها، سه ضلعی ودیگری سی‌ضلعی باشد. یك چندوجهی که برای ساختن آن،

چنین امکانهای زیادی وجود دارد، در عین حال دارای این شرطهای محدود کننده هم می‌باشد که باید تعداد یالهای هر رأس با هم و تعداد ضلعهای هروجه با هم برابر باشد. وتنها ۵ نوع چند وجهی وجود دارد که این شرطهای محدودکننده را می‌پذیرد.

وقتی که من دربارهٔ محاسبهٔ مجموع

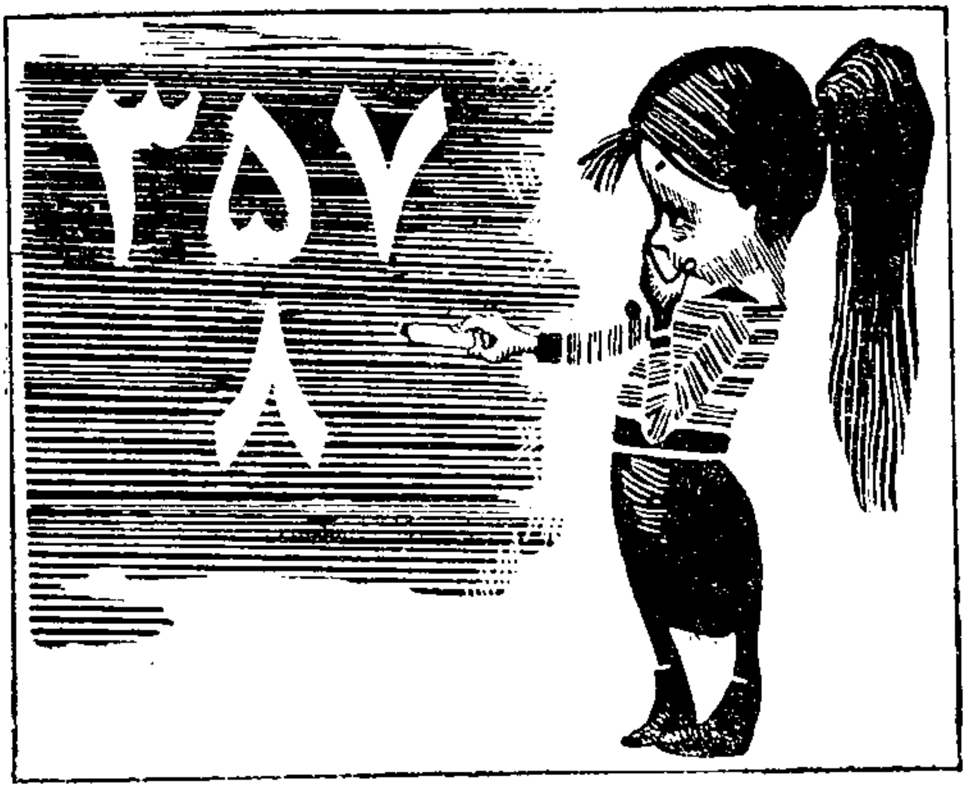
$$۱+۲+۳+...+n$$

می‌اندیشیدم، فکرم متوجه توپولوژی شد؛ واین، گواهی براین امر است که ریاضیات درمجموع، یك واحد به هم پیوسته را تشکیل می‌دهد. وقتی که ما با ریاضیات کار می‌کنیم، همیشه بستگی بین همهٔ شاخه‌های آن به چشم می‌خورد.

۶. همهٔ امکانها را بیازماییم

ترکیب

به احتمال زیاد، هرگز معلم به این مطلب فکر نکرده است که: به‌چند طریق مختلف می‌تواند دانش‌آموزان کلاس خود را به‌گروههای دونفری تقسیم کند؟ حداکثر کاری که می‌کند اینست که دانش آموزان را سنجیده‌وعاقلانه‌جابدهد ودراین‌باره به‌وجود علاقه‌ها وبی‌علاقگیهای آنهانسبت‌به‌هم‌توجه کند. ولی‌محققین کوچك، که سرشار ازکنجکاویهای تازه‌هستند، می‌خواهند همهٔ امکانات رابیازمایند. وقتی من به‌شاگردهای ده‌ساله‌ام می‌گفتم که برای ضرب۸در ۳۵۷، می‌توان از یکان یا سدگان آغاز کرد، بلافاصله صدایی بلند شد:

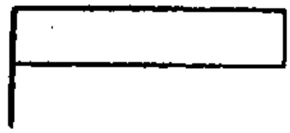


ـ آیا از دهگان هم می‌توان آغاز کرد؟

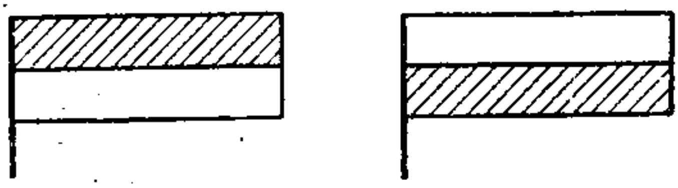
من جواب‌دادم که‌می‌توان، تنها باید‌خوب بدانیم که حاصلضربهای جزئی را درکجا بگذاریم؛ ولی هنوز پاسخ من تمام نشده بود که‌دانش آموزان می‌خواستند بدانند که به طورکلی به چندطریق می‌توان این ضرب را انجام داد. به این دلیل است که من لازم دیدم سیری در منطقهٔ ترکیبها (یعنی رشته‌ای ازریاضیات که‌به‌بررسی‌روشهای ممکن جابه‌جایی می‌پردازد) بکنم.

همهٔ بچه‌ها به‌این موضوع علاقمندند ومی خواهند بدانند که با سه نوار رنگی افقی ، چند پرچم مختلف می‌توان درست کرد. روشن است که با یك رنگ تنها یك پرچم می‌توان درست کرد.

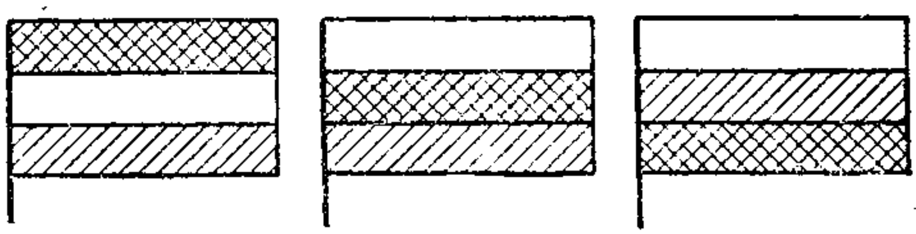
نوار‌رنگی‌دوم‌رابه‌دوطریق‌می‌توان‌به‌این‌پرچم‌اضافه‌کرد(البته‌به‌این



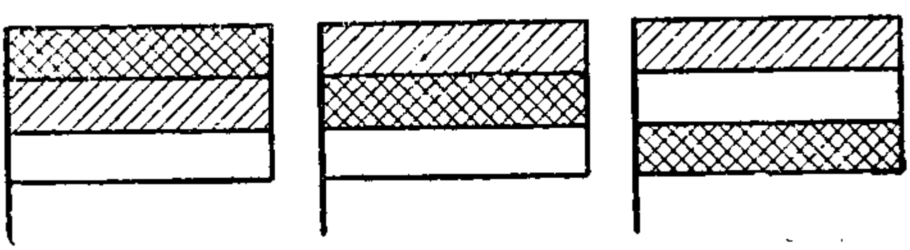
شرط که از هر رنگ تنها یك بار استفاده کنیم)؛ نوار دوم را دربالا یا پایین نوار اول می‌توان دوخت:



نوار رنگی سوم را چگونه می‌توان به این دونوار رنگی اضافه کرد؟ این نوار سوم را می‌توان در بالا یا در پایین ویا بین دو نوار نخستین قرارداد. از پرچم دو رنگ سمت چپ، سه پرچم سه رنگ تازه بدست می‌آید:

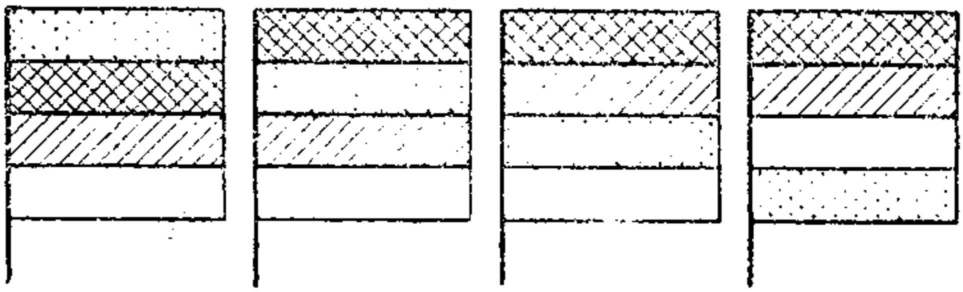


به همین ترتیب، از پرچم دورنگ سمت راست هم، سه پرچم تازهٔ سه رنگ پیدامی‌شود:



معلوم می‌شود کـه با سه نـوار رنگی، می‌توان ۳×۲، یعنی ۶ نـوع مختلف پرچم درست کرد.

حالا می‌توانیم بـه پرچم چهاررنگ بپردازیم. رنـگ چهارم را می‌توان به این ترتیب به پرچم سه‌رنگ اضافه کـرد که آنـرا دربالای رنگ اول، بین رنگ اول ودوم، بین رنگ دوم وسوم ویا در زیررنگ سوم قرار داد. از هر پرچم سه رنگ ، می‌توان چهار پرچم چهار رنگ بدست آورد. مثلاً، از آخرین پرچم سه‌رنگ بدست می‌آید:



به این‌ترتیب، معلوم می‌شود‌که از ۶=۳×۲ پرچم سـه رنگ،می‌توان ۲۴=۶×۴=۲×۳×۴پرچم چهاررنگ درست‌کرد. به این عاملهای ضرب، عامل ۱ را هم اضافه می‌کنیم ـ که هیچ تغییری در حاصلضرب نمی‌دهد ـ وقانون زیر را بدست می‌آوریم:

تعداد پرچمهای یك‌رنگ برابر است با: ۱

تعداد پرچمهای دورنگ برابر است با: ۲=۲×۱

تعداد پرچمهای سه رنگ برابر است با: ۶=۳×۲×۱

تعداد پرچمهای چهاررنگ برابراست با: ۲۴=۴×۳×۲×۱

روشن است که‌این دنباله‌را تا هـرجا که بخواهیم می‌تـوان‌ادامه داد، که البته دیگر نمی‌توان صحبت از پرچم ورنگهای آن کرد. مثلاً بـه ۱۲۰=۵×۴×۳×۲×۱ روش مـی‌تـوان سوپ را بین ۵ بچه

تقسیم کرد، یا برای قراردادن ۶ چیز به دنبال یکدیگر، به اندازهٔ ۷۲۰=۶×۵×۴×۳×۲×۱ روش وجود دارد.

ضرب

۱×۲×۳×۴×۵×۶

شامل این دستور است: عددهای از ۱ تا ۶ را درهم ضرب کن و ادامه نده! این دستور را معمولاً به صورت کوتاهی نشان می‌دهند؛ آخرین عامل ضرب را می‌نویسند وعلامت تعجب را جلو آن می گذارند. به‌این ترتیب حاصلضرب شما به صورت

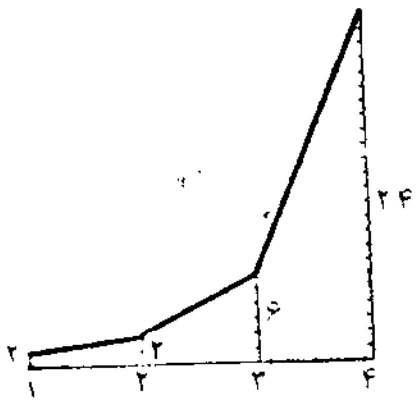
۶ !

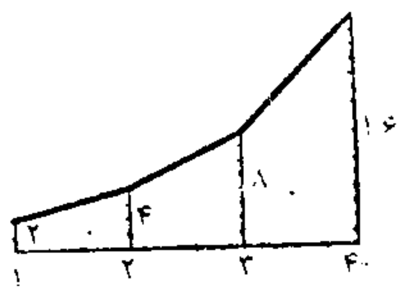
نشان داده می‌شود. آنرا بخوانید «شش فاکتوریل، یا فاکتوریل شش». مثلاً:

۱!=۱؛۲!=۱×۲؛ ۳!=۱×۲×۳؛ ...

روشن‌است که مقدار این حاصلضرب، بستگی به این دارد که تاچه‌اندازه در دنبالهٔ عددها جلورفته باشیم. درضمن باید یادآور شد که اینهم یك تابع است. منحنی حرارتی آنرا رسم می‌کنیم.

روی خط راست افقی، همهٔ عددهای درست راتا عددی که‌دنبالهٔ عاملهای ضرب ما به آن ختم می‌شود، قرار مـی‌دهیم و روی خط راست قائم‌مقدار نظیر فاکتوریل‌آنها را. برای مقایسه، منحنی‌حرارتی توانهای ۲ را در کنار آن قرارداده‌ایم:





به روشنی دیده می‌شود که منحنی فاکتوریل در فاصلهٔ ۱ تا ۳، زیر منحنی توان قرار گرفته است، ولی از آن به بعد روی منحنی توان قرار می‌گیرد ونسبت به منحنی توان، با شیب خیلی تندتری به طرف بالا می‌رود. این ویژگی، تنها در مقایسهٔ با توان ۲، بدست نمی‌آید. فاکتوریل، نسبت به هر توانی «سریعتر» صعودی است. این موضوع، حتی برای موقعی که پایه را عدد بزرگی مثل ۱۰۰ هم بگیریم، تقریباً روشن است. وقتی که پایه مساوی ۱۰۰ باشد، آنرا مرتباً در عدد ثابتی (که در این مورد ۱۰۰ است) ضرب می‌کنیم. نودونه عامل نخستین فاکتوریل از عاملهای نظیر در توان، کوچکترند، ولی از عامل صدم به بعد، مرتباًبزرگ وبزرگتر می‌شود: ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ...، وبه همین مناسبت دیربازود، منحنی فاکتوریل به منحنی توان می‌رسد وازآن جلو می‌افتد.

ما ازپرچمهای یك رنگ شروع کردیم وگام به گام، تعدادپرچمهای دورنگ، سه رنگ و چهار رنگ را به کمك ضربهای زیبای زیر، محاسبه کردیم :

$$۱\times۲;\ ۱\times۲\times۳;\ ۱\times۲\times۳\times۴$$

ما همچنین حالا می‌دانیم که از تعداد معینی عنصر، به‌چند طریق می‌توان زوجهای مختلف را انتخاب کرد. از ۸ عنصرمی‌توانیم به‌اندازهٔ

$$\frac{۸ \times ۷}{۲} = ۲۸$$

زوج انتخاب کنیم؛ ما این مطلب را ثابت کردیم. به‌همین ترتیب، از۱۵ عنصر، می‌توانیم

$$\frac{۱۵ \times ۱۴}{۲} = ۱۰۵$$

زوج بدست آوریم وغیره.

آیا می‌شود براساس همین نتیجه‌ها، ازتعداد مشخصی عنصر، به جای زوجها، تعداد گروههای سه تایی وچهارتایی و غیره را گام به‌گام بدست آوریم؟

ببینیم به چند طریق مختلف می‌توان، مثلاً به زوج

۱،۲

عنصری از عددهای ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸ را اضافه کرد، تا گروه سه‌تایی بدست آید.

تنها به عنصرهایی که در هرگروه قراردارد، توجه می‌کنیم وبه ردیف آنها کاری نداریم (فرض کنید که بخواهیم از هشت نفر، یك گروه سه نفری را به طرف مأموریتی بفرستیم. در اینجا تنها گفتگواز اینست که چه کسی ورقهٔ مأموریت را دریافت می‌کند). هرکدام از شش عنصر دیگر را می‌توان به زوج (۲ ، ۱) اضافه کرد وبنابراین،

شش گروه سه‌تایی زیر بدست می‌آید:

۱ ۲ ۳
۱ ۲ ۴
۱ ۲ ۵
———
۱ ۲ ۶
۱ ۲ ۷
۱ ۲ ۸

(فعلاً به خط راست افقی کـه زیر یکی از گـروهها وجود دارد، کاری نداشته باشید). به‌همین ترتیب، هرزوج دلخواه را می‌توان به شش‌طریق مختلف، به گروههای سه‌تایی تبدیل کرد؛ مثلاً از زوج (۵ ، ۲)، این گروههای سه‌تایی بدست می‌آید:

۲۵۱	ویا اگر عددهای هرگروه را به ترتیب صعودی بنویسیم:	۱۲۵ (زیرخط‌دار)
۲۵۳		۲۳۵
۲۵۴		۲۴۵
۲۵۶		۲۵۶
۲۵۷		۲۵۷
۲۵۸		۲۵۸

در نگاه اول به نظر می‌رسدکـه تعداد گروههای سه‌تایی از ضرب تعداد گروههای دوتایی در ۶ بدست می‌آید. ولی بعضی از گروههای سه‌تایی تکراری هستند؛ مثلاً گروه (۱،۲،۵) هم بین گروههای سه‌تـایی است که از زوج (۱،۲) بدست آمدند و هم بین گروههای سه‌تایی که به‌کمك زوج (۲،۵) تشکیل شدند (ومن این‌گروه مشترك را دردوحالت به‌وسیلهٔ يك پاره خط راست، که زیر آنها کشیده‌ام، مشخص کرده‌ام). همین‌گروه

سه‌تایی، در حالتی‌هم که اززوج(۱،۵) آغاز می کنیم،پیدا می‌شود، زیرا عضو سوم این گروه می‌تواند در حالت خاص مساوی ۲ باشد.می‌بینیم که هرگروه سه‌تایی، سه‌بار ظاهر می‌شود. او از هر زوجی که از راه‌کنار گذاشتن یکی از عضوهای‌گروه سه‌تایی بدست‌می‌آید، پیدا می‌شود. مثلاً اگر گروه سه‌تایی (۲،۳،۵) را در نظر بگیریم، باکنار گذاشتن یکی از عضوهای آن، به یکی از سه زوج زیر می‌رسیم:

۲۳
۲۵
۳۵

ازطرف دیگر،گروه سه‌تایی(۲،۳،۵) رامی‌توان از هرکدام از این‌زوجها بدست آورد: برای این منظور باید به زوج اول ۵، یا به زوج دوم ۳ ویا به زوج سوم ۲ را اضافه کرد. به این‌ترتیب، اگر بخواهیم هرگروه سه‌تایی را تنها یکبار بدست آوریم، باید تعداد کلی آنها را به سه‌بخش کنیم.بنابراین،برای اینکه‌تعدادگروههای سه‌تایی ۸ عنصر را پیداکنیم، باید ابتدا تعداد زوجهای این ۸ عنصر را در ۶ ضرب وسپس نتیجه را بر ۳ تقسیم کنیم. می‌دانیم که تعداد زوجها برابر است با

$$\frac{۸\times۷}{۲}$$

وقتی که این‌مقدار را در ۶ ضرب کنیم، چنین می‌شود:

$$\frac{۸\times۷\times۶}{۲}$$

حالا دیگر این می‌ماندکه این عدد را بر ۳ تقسیم کنیم. وای تفاوتی‌ندارد

که عددی را ابتدابر۲ وسپس بر ۳ یایکباره بر ۶=۳×۲ تقسیم کنیم؛ در هر دو حال، نتیجه یکی خواهدبود.

به این ترتیب، از ۸ عنصر می‌توان ، تعداد

$$\frac{۸\times۷\times۶}{۱\times۲\times۳}$$

گروه سه‌تایی درست کرد. برای اینکه، نتیجهٔ حاصل صورت زیباتری داشته باشد، به مقسوم علیه، عامل ۱ را اضافه کرده‌ایم.

به سادگی معلوم می‌شود که از ۱۲ عنصر، می‌توان

$$\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۱\times۲\times۳}$$

گروه سه‌تایی، و از ۱۰۰ عنصر

$$\frac{۱۰۰\times۹۹\times۹۸}{۱\times۲\times۳}$$

گروه سه‌تایی بدست آورد.

وحالا که تعداد گروههای سه‌تایی را می‌دانیم، می‌توانیم تعداد گروههای چهارتایی را جستجو کنیم. دوباره به همان هشت عنصرتوجه می‌کنیم. از هرگروه سه‌تایی، با اضافه کردن هرکدام از دیگر عنصرها، می‌توان پنج گروه چهارتایی بدست آورد. مثلاً، از گروه سه‌تایی

۱ ۲ ۳

این گروههای چهارتایی پیدا می‌شود

۱۲۳۴
۱۲۳۵
۱۲۳۶
۱۲۳۷
۱۲۳۸

به این ترتیب، برای گروههای چهارتایی، پنج برابر گروههای سه‌تایی بدست می‌آید. ولی هرگروه چهارتایی ، چهاربار تکرار می‌شود. مثلاً، گروه چهارتایی

۱۲۳۴

از گروه ۱۲۳، با اضافه کردن عدد ۴
از گروه ۱۲۴، با اضافه کردن عدد ۳
از گروه ۱۳۴ با اضافه کردن عدد ۲
واز گروه ۲۳۴ با اضافه کردن عدد ۱، بدست می‌آید.

بنابراین باید نتیجهٔ حاصل رابر ۴ تقسیم کنیم. تعداد گروههای سه‌تایی برابر است با

$$\frac{۸ \times ۷ \times ۶}{۱ \times ۲ \times ۳}$$

باید این عدد را در ۵ ضرب وسپس بر ۴ تقسیم کنیم، در اینصورت تعداد گروههای چهارتایی چنین می‌شود.

$$\frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴}$$

حالا دیگر می‌توان به قانونی دست یافت. مثلاً، تعداد گروههای هفت‌تایی

که می‌توان از ۱۰ عنصر بدست آورد، برابر است با

$$\frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷}$$

واین روشی بسیار زیباست. وقتی که بخواهیم تعدادگروههای هفت‌تایی را از ۱۰ عنصر جداکنیم، همیشه هم در صورت وهم در مخرج کسر ۷ عامل وجود دارد، ضمناً عاملهای مخرج از ۱ تا ۷ وعاملهای صورت از ۱۰ وعددهای کوچکتر از آن تشکیل می‌شود.

براساس این قانون، تعداد عنصرهای یگانه‌ای که از ۵ عنصر می‌توان انتخاب کرد، برابر است با $\frac{۵}{۱}$، یعنی پنج. تعدادگروههای سه‌تایی که می‌توان از ۳ عنصر بدست آورد، برابر است با $\frac{۳ \times ۲ \times ۱}{۱ \times ۲ \times ۳}$، یعنی یك گروه. اینهم روشن است، زیرا از کیسه‌ای که دارای سه گلوله است، تنها به یك طریق می‌توان هرسه گلوله را خارج کرد.

همچنین، تنها به یك طریق می‌توان دست «خالی» را از کیسه

گروههای چهارتایی	گروههای سه‌تایی	گروههای دوتایی	گروههای یك عنصری	گروههای صفرتایی
—	—	—	$\frac{۱}{۱}=۱$	۱ ازیك عنصر
—	—	$\frac{۲ \times ۱}{۱ \times ۲}=۱$	$\frac{۲}{۱}=۲$	۱ از ۲ عنصر
—	$\frac{۳ \times ۲ \times ۱}{۱ \times ۲ \times ۳}=۱$	$\frac{۳ \times ۲}{۱ \times ۲}=۳$	$\frac{۳}{۱}=۳$	۱ از ۳ عنصر
$\frac{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴}=۱$	$\frac{۴ \times ۳ \times ۲}{۱ \times ۲ \times ۳}=۴$	$\frac{۴ \times ۳}{۱ \times ۲}=۶$	$\frac{۴}{۱}=۴$	۱ از ۴ عنصر

خارج کرد، واین به تعداد گلوله‌هایی که در کیسه وجود دارد، بستگی پیدا نمی‌کند. به همین مناسبت، قرار می‌گذاریم که تعداد «گروههای صفر عنصری»، از هر تعداد عنصر، برابر با ۱ باشد.

حالا دیگر می‌توانیم تعداد ترکیبها را به‌ترتیب جدول صفحهٔ‌قبل بنویسیم.

از کیسهٔ خالی‌هم به‌یك طریق می‌توان دست خالی رابیرون کشید، بنابراین‌تعدادگروههای‌صفرتایی‌ازصفرعنصر هم‌بایدمساوی۱ باشد.اگراین عدد ۱ را هم در بالابنویسیم، نتیجه‌هایی رابدست که‌آوردیم،می‌توان‌به این ترتیب نوشت:



این جدول مثلثی شکل را، مثلث‌پاسکال می‌نامند. این مثلث خاصیتهای جالب بسیاری دارد. بلافاصله دیده می‌شود که این مثلث متقارن است،

یعنی نیمهٔ چپ آن، قرینهٔ راست آنست. دلیل ایـن تقارن روشن است: وقتی که در یك کیسه، ۳ گلوله باشد و شما یك گلوله انتخاب کنید، تعداد حالتهای انتخاب یك گلوله ، برابر است با تعداد حالتهای بـاقی ماندن ۲ گلوله در کیسه. همین وضع برای وقتی‌که دوگلوله از ۵گلوله انتخاب می کنیم، وجود دارد: انتخاب هر۲ گلوله، متناظر است بـا ۳ گلوله‌ای که باقی می‌مـاند. بنابراین، وقتی کـه ۵ عنصر داریـم، تعداد گروههای دوتایی با تعدادگروههای سه‌تایی برابر می‌شود؛ واینها،همان عددهایی هستند که تقارن را در مثلث پاسکال به وجود می‌آورند.

خاصیت دیگر مثلث پاسکال، مربوط بـه قاعده‌ای است که بنابر آن می‌توان هرسطر را از روی سطر قبل بدست آورد؛ در مثلث، عدد ۲ زیر۱و۱نوشته‌شده است: ۲=۱+۱؛ همینطور، ۳ بین ۱ و ۲قراردارد: ۳=۲+۱ وغیره: این قانون تا آخر ادامه دارد وبنابراین مـی‌توانیم سطر بعدی مثلث پاسکال را هم بنویسیم:

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

زیرا ۵=۴+۱ و ۱۰=۶+۴. و به همین ترتیب سطر بعدی:

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

و غیره .

اثبات این قانون دشوار نیست، ولی ما تنها به یك‌آزمایش‌اکتفا می کنیم. عدد ۱۵ در این سطر، به معنای تعداد زوجهایی است کـه از ۶ عنصر می‌توان بدست آورد، و این تعداد هم برابر است با

$$\frac{۶\times۵}{۱\times۲}=\frac{۳۰}{۲}=۱۵$$

از این قانون نتیجه می‌شود که مجموع عددهای هرسطر، دوبرابرمجموع عددهای سطر قبل از آنست. درواقع، سطر بعدی از سطر قبلی، بـه ایـن ترتیب بدست می‌آید

۱ ۱+۶ ۶+۱۵ ۱۵+۲۰ ۲۰+۱۵ ۱۵+۶ ۶+۱ ۱

وهمانطور که دیده می‌شود برای ساختن سطر بعدی، هرکدام ازعـددهای سطر قبل، یعنی

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

دوباره بهٔ کار می‌رود.

استقراء کامل

ازاینجا یك خاصیت دیگر هم پیدا می‌شود: اگرمجموع عددهای هرسطر را بدست آوریم، توانهای متوالی عدد ۲ بدست می‌آیـد. برای سطرهای اول، این موضوع روشن است (فعلاً می‌توانیم سطر اول را که تنها شامل عدد ۱ است، فراموش کنیم) زیرا

$$۱+۱=۲=۲^{۱}؛\ ۱+۲+۱=۴=۲^{۲}$$

وبرای سطرهای بعدی ، دیگر لازم نیست به‌تحقیق بپردازیم. اگـر ایـن خاصیت برای سطری بر قرار باشد، بـدون تردید ، بـرای سطر بعدی هم برقرار است. در واقع، می‌بینیم که مجموع عددهای هر سطر، دو برابر مجموع عددها در سطر قبل است. وقتی که توانی از ۲ را، دوبـاره در۲

ضرب کنیم، به‌صورت

$$(2\times 2\times 2\times \ldots \times 2)\times 2$$

درمی آید که باز هم توانی از۲ است وضمناً توان آن یك واحد ازتوان قبلی بیشتر است.

این روش استدلال را، که‌کاملاً براساس ساختمان عددهای‌طبیعی قراردارد، استقراء ریاضی‌یا استقراء کامل گویند. دنبالهٔ عددهای طبیعی از ۱ شروع می‌شود و اگر به ترتیب، مقدار ثابت واحد را اضافه کنیم، به هرعددی از این دنباله می‌رسیم. استقراءِکامل براین اساس قرار داردکه: هر خاصیتی که در آغاز دنبالهٔ عددهای طبیعی وجود داشته باشد و از هر عدد به عدد بعدی «به ارث» برسد، در اینصورت برای همهٔ عددهای طبیعی‌وجود خواهدداشت.این‌روش‌نتیجه‌گیری اجازه می‌دهد،باوجودیکه دسترسی به همهٔ عددهای طبیعی نداریم، خاصیتی را برای همهٔ آنهاثابت کنیم. ما تنها باید به این دو نکته توجه‌کنیم: اولاً حکم مفروض‌برای عدد ۱ درست است؛ ثانیاً درمورد این حکم «قانون ارث» وانتقال‌ازیك عدد به عدد بعدی صادق است.

به این‌ترتیب، یك‌نتیجهٔ‌بسیار مهم می‌گیریم: ریاضیات، باوسایل وامکانات محدود، به جهان بیکران ونامحدود، دست می‌یابد.

برای کسانی که درجستجوی سرگرمیهای جالب مربوط به عمل ضرب هستند، سطرهای اول مثلث پاسکال، چیز شگفت‌آوری نیست.در واقع، اگر توانهای پشت سرهم عدد ۱۱ را بنویسیم:

$$۱۱^{۱} = ۱۱$$
$$۱۱^{۲} = ۱۱ \times ۱۱ = ۱۲۱$$
$$\underline{۱۱}$$
$$۱۲۱$$
$$۱۱^{۳} = ۱۲۱ \times ۱۱ = ۱۳۳۱$$
$$\underline{۱۲۱}$$
$$۱۳۳۱$$
$$۱۱^{۴} = ۱۳۳۱ \times ۱۱ = ۱۴۶۴۱$$
$$\underline{۱۳۳۱}$$
$$۱۴۶۴۱$$

رقمهای حاصل، همان مثلث پاسکال راتشکیل می‌دهند. اگر به‌عمل‌ضرب دقت کنیم، خیلی زود می‌فهمیم که جریان از چه قرار است. وقتی‌که مجموعهای جزیی را محاسبه مـی‌کنیم، درست همان عملهایی را انجام می‌دهیم که برای تشکیل مثلث پاسکال لازم است. (در $۱۱^{۵}$، این نتیجه گیری به‌هم‌می‌خورد،زیرا ضمن جمع حاصلضربهای‌جزیی،این‌نتیجه بدست می‌آید:

$$۱۱^{۵} = ۱۴۶۴۱ \times ۱۱$$
$$\underline{۱۴۶۴۱}$$
$$۱۶۱۰۵۱$$

در حالیکه، سطر مـربوط درمثلث پاسکال به صورت ۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱ است.)

$$۱۱ = ۱۰ + ۱،$$
$$۱۲۱ = ۱۰۰ + ۲۰ + ۱ = ۱ \times ۱۰^{۲} + ۲ \times ۱۰ + ۱،$$
$$۱۳۳۱ = ۱۰۰۰ + ۳۰۰ + ۳۰ + ۱ =$$
$$= ۱ \times ۱۰^{۳} + ۳ \times ۱۰^{۲} + ۳ \times ۱۰ + ۱$$

وغیره. می‌بینیم که عددهای مثلث پاسکال در بسط توانهای عدد $10+1$ ظاهر می‌شوند، به این ترتیب که در توانهای عدد ۱۰ ـ که مرتباً کوچك می‌شود ـ ضرب شده‌اند. جملهٔ دوم مجموع $10+1$ برابراست با ۱. همهٔ توانهای عدد ۱ برابر با ۱ می‌شود، زیرا $1\times1=1$، و به همین مناسبت است که دراینجا نقش توانهای این جملهٔ دوم را نمی‌بینیم. ولی ما می‌توانیم آنرا به اینصورت بنویسیم:

$$11^3=(10+1)^3=1331=1000+300+30+1=$$
$$=1\times10^3+3\times10^2\times1+3\times10\times1^2+1\times1^3$$

یعنی، به این ترتیب که توان جملهٔ اول مرتباً پایین می‌آید، در حالیکه توان جملهٔ دوم مرتباً بالا می‌رود. این روش از اینجهت مفید است که می‌توان آنرا برای مکعب مجموع دو جملهٔ دیگر هم به کاربرد، مثلاً[4]

$$7^3=(5+2)^3=1\times5^3+3\times5^2\times2+3\times5\times2^2+1\times2^3$$

البته می‌توان این دستور را درحالت کلی ثابت کرد، ولی ما تنها به تحقیق درستی همین حالت خاص می‌پردازیم:

$$1\times5^3=5\times5\times5=25\times5=125$$
$$3\times5^2\times2=3\times5\times5\times2=15\times10=150$$
$$3\times5\times2^2=3\times5\times2\times2=3\times10\times2=60$$
$$1\times2^3=2\times2\times2=4\times2=8$$

نتیجه: ۳۴۳

و در واقع هم

$$7^3=7\times7\times7=49\times7=343$$

این کشف، در بسیاری موارد، کار محاسبه را ساده می‌کند. اغلب به جای اینکه مستقیماً عددی را به توان برسانیم، بهتر است که آنرا به مجموع دوجمله تبدیل کنیم وسپس از این کشف برای حاصل آن استفاده کنیم. مثلاً بچه‌هایی هستند که ضرب در ۷ برایشان‌ناخوشایند است. در اینصورت، اگر $(۲+۵)^۳$ را در نظر بگیرند، تنها با ضرب در ۵ و ۲ سروکار خواهند داشت: ۵ ضرب در ۲ مساوی ۱۰ می‌شودوضرب در ۱۰ هم خیلی سریع و ساده انجام می‌گیرد.

مجموع دوجمله را دوجمله‌ای می‌نامند. به‌همین مناسبت، قاعده‌ای را که برای به توان رساندن کشف کردیم، بسط دوجمله‌ای یا دوجمله‌ای نیوتون نامند. ضمناً عددهای مثلث‌پاسکال را، ضریبهای دوجمله‌ای گویند.

مربع مجموع دوعدد

توان دوم، بیش از همهٔ توانهای دیگر به کار می‌رود. سطر دوم مثلث پاسکال، ازاین عددها تشکیل شده است:

۱ ۲ ۱

اگربخواهیم بسط $(۳+۵)^۲$ را بدست آوریم، باید جمله‌ها را به ترتیب در این عددها ضرب‌کنیم؛ این جمله‌ها، از $۵^۲$ آغاز می‌شود و باکم‌شدن توان ۵ به توان ۳ اضافه می‌شود تا به $۳^۲$ برسد. به این ترتیب:

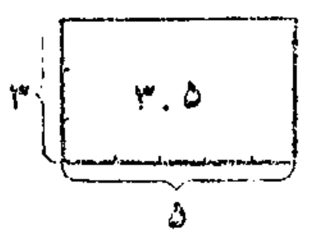
$$(۵+۳)^۲=۱\times۵^۲+۲\times۵\times۳+۱\times۳^۲$$

ویا با حذف عاملهای غیر لازم واحد:

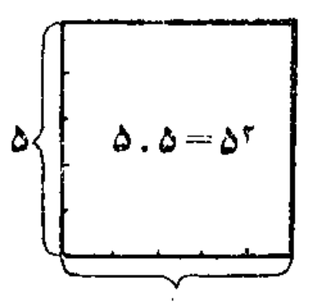
$$(۵+۳)^۲=۵^۲+۲\times۵\times۳+۳^۲$$

به این ترتیب، بـه همان قاعدهٔ آشنای دبیرستانی‌می‌رسیم: بـرای اینکه مجموع دو جمله را به توان ۲ برسانیم، باید توان دوم جملهٔ اول را با دو برابـر حاصلضرب جملهٔ اول در جملهٔ دوم و تـوان دوم جملهٔ دوم جمع کنیم.

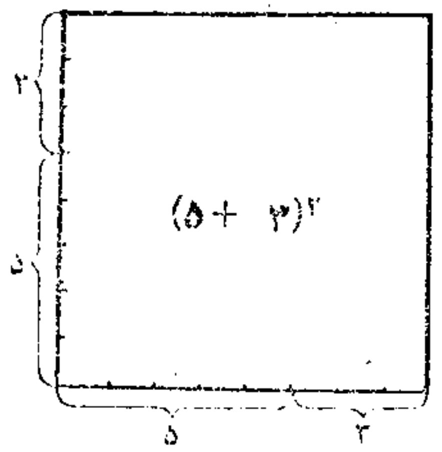
این «کشف» را می‌توان خیلی ساده‌تر ومثلاً با تصورهندسی‌بیان کرد. می‌دانیم که مساحت مستطیل‌برابراست باحاصلضرب دوضلع‌مجاور آن. حالا، اگربرعکس، حاصلضربی داشته‌باشیم، می‌توان این‌حاصلضرب را به وسیلهٔ مساحت مستطیلی نشان داد کـه دو ضلع مجاور آن، برابر باعاملهای‌ضرب‌باشد. مثلاً، حاصلضرب ۳ × ۵ رامی‌توان‌به‌طریق‌هندسی، با این مستطیل نشان داد:



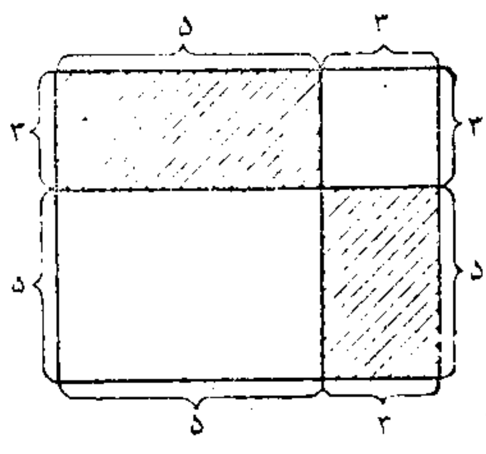
وحاصلضرب $۵\times۵=۵^۲$ را با این مسطیل



روشن است که در اینحالت یك مربع بدست می‌آیدوبه همین مناسبت‌است که توان دوم را «مربع» هم گویند. در شکل زیر، عبارت $(۵+۳)^۲$نشان داده شده است:



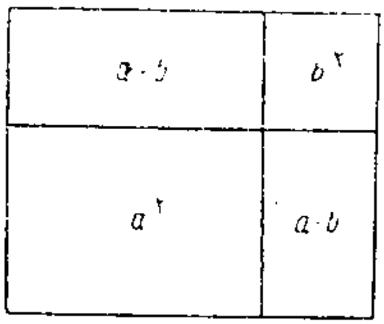
که در آن، جمله‌های مجموع ما، پنهان شده است. ولی، اگـر آنـرا به صورت زیر تقسیم کنیم، دو باره جمله‌های جمع ظاهر می‌شود:



در شکلی که بدست می‌آید، مساحت مربع بزرگتر مساوی $۵^۲$، مساحت مربع کوچکتر مساوی $۳^۲$ است. علاوه برآن، دومستطیل وجوددارد که مساحت هرکدام مساوی ۳×۵ است. درنتیجه

$$(۵+۳)^۲=۵^۲+۲\times۵\times۳+۳^۲$$

واین، همچون شکلهای کتابهای درسی هندی روشن است. گفتگو برسر اینست که معلمین هندی پرحرفی را دوست ندارند.آنها تنها می‌گویند: مجموع دوجمله را می‌توان با روشی به توان دوم رسانید و سپس‌اضافه می‌کنند «ببینید»، آنـوقت شکلی رسم می‌کنند کـه همه چیز روی آن روشن شده است:

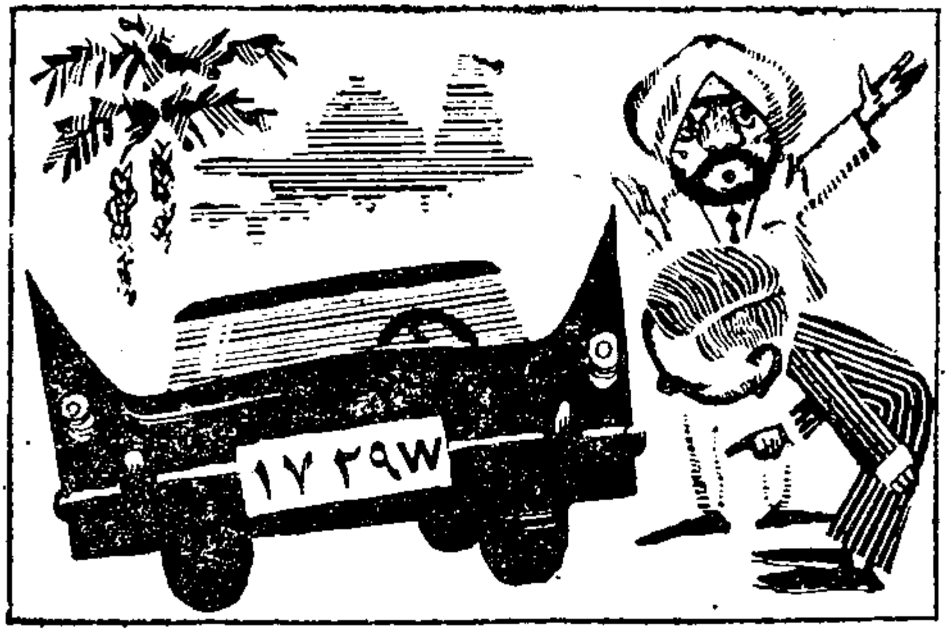


و هر کس که بتواند ببیند، همه چیز را می‌فهمد.

۷. رنگ‌آمیزی رشتهٔ عددهای طبیعی

از همان قدیم ، هندیها، ریاضیدانهای غیر عـادی بوده‌اند و بـه پیشترفت این دانش، خیلی کمك کرده‌اند. در بـارهٔ یکی از دانشمندان هندی، این‌لطیفه را تعریف می‌کنند: یکی ازدوستان اروپائیش‌ازاوپرسید که آیا شمارهٔ اتومبیل او -۱۷۲۹- بدشانسی برایش نیاورده است؟ و او بلافاصله‌پاسخ‌داد: «هرگز! ۱۷۲۹ ،عددبسیار جالبی است. این‌کوچکترین عددی است که می‌تواند به دو طریق به مجموع دو مکعب کامل تبدیل شود: این عدد هم برابر $۹^۳+۱۰^۳$ وهم برابر $۱^۳+۱۲^۳$ است».

برای ریاضیدان هندی حتی یك عدد چهار رقمی،کاملاً[4] آشنا و



دست آموز است و به تمام رمزهای آن آگاهی دارد.

در دبستانهای ما هم، حتی عددهای کوچك را هم به عنوان وجودی که ویژگیهای مخصوص به خود دارد، بررسی می‌کنند. مثلاً، عدد ۲ در نظر یك دانش‌آموز کوچك، تنها یکی از عددهای رشتهٔ بینهایت نیست، بلکه برای خود شخصیت جداگانه‌ای هم دارد. ۲، کوچکترین عدد زوج است، برابر است ۱ + ۱، نصف عدد ۴ است و غیره. دربارهٔ ویژگیهای شخصی عددها، بحث می‌کنیم.

می‌دانیم که از هردو عدد، یکی زوج است:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ...

همچنین از هر سه عدد پشت سرهم، یکی بر ۳ بخش پذیراست:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ...

از هر چهار عدد پشت سرهم، یکی بر ۴ بخش پذیر است:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ ۱۰، ۱۱، ۱۲،...

وغیره. اینها، موجهای کوچك یا بزرگی هستند، که در داخل رشتهٔ طبیعی عددها به طور یکنواخت جلو می‌روند و حرکت یکنواخت خود را هرگز از دست نمی‌دهند. ولی، آیا این یکنواختی گول زننده نیست، آیا ممکن نیست که در جایی، وضع پیش بینی نشده‌ای ظاهر شود؟

و در واقع هم لازم نیست که خیلی در انتظار این حادثه پیش بینی نشده بمانیم وکافی است به بررسی ردیف عددهای اول بپردازیم.

به نتیجه‌هایی که درمورد بخش پذیری گرفتیم، برمی‌گردیم:

عددهای ۱ ، ۲ ، ۵ و ۱۰، همهٔ مقسوم علیه‌های عدد ۱۰ هستند،

عددهای ۱،۲،۳،۴،۶و۱۲ ، همهٔ مقسوم علیه‌های عدد ۱۲هستند؛

عددهای ۱ و ۱۱ ، همهٔ مقسوم علیه‌های عدد ۱۱ هستند؛

هرعددی، بر ۱ وبرخودش بخش‌پذیراست.

ولی عددهایی، مثل ۱۱، وجوددارند که به جز همین دو عدد (یعنی ۱ و خود عدد)، مقسوم علیه دیگری ندارند. ماچنین عددهایی را عدد اول گوییم.

عدد ۱ را نمی‌توان ازاین لحاظ جزو چنین عددهایی دانست،زیرا تنها بر ۱ بخش پذیر است، یعنی عدد ۱، تنها عددی است که فقط یك مقسوم علیه دارد وبه‌همین مناسبت نمی‌توان آنرا عددی اول به حساب آورد.

کوچکترین عدد اول، برابراست با ۲. ضمناً، ۲ تنها عدد زوجی است که اول است؛ عددهای زوج دیگر، علاوه بر۱و خودشان، بر ۲

هم‌بخش پذیرند ولی درمورد عدد زوج ۲، خود عدد و ۲ برهم منطبق‌اند.

تجزیه به‌عاملهای اول

عددهایی راکه‌تنها دومقسوم علیه دارند، به این علت اول‌گویند که همهٔ عددهای دیگر را می‌توان به یاری آنها درست کرد. بازهم به همین مناسبت،بقیهٔ عددها را، مرکب گوییم. به صورت دقیق‌تر می‌توان گفت که: هرعدد مرکب را می‌توان به‌صورت ضرب عددهای‌اول‌نوشت.

مثلاً، کوشش می‌کنیم که عدد ۶۰ را به صورت چنین ضربی بنویسیم:

$$۶۰=۶\times۱۰$$

۶ و ۱۰ را هم می‌توان به صورت ضرب عاملهای کوچکتری نوشت:

$$۶=۲\times۳ \quad و \quad ۱۰=۲\times۵$$

که اگر این عاملها را به‌جای ۶ و ۱۰ قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$۶۰=۲\times۳\times۲\times۵$$

ودر اینجا دیگر همهٔ عاملهای ضرب، عددهایی اول هستند.

راه دیگری انتخاب می‌کنیم. قبلاً هم دیده‌ایم که ۶۰ را به صورتهای مختلف می‌توان به ضرب دو عامل تبدیل کرد. اگر مثلاً از این تبدیل شروع کنیم:

$$۶۰=۴\times۱۵$$

در آنصورت داریم:

۴=۲×۲ ، ۱۵=۳×۵

وبنابراین

۶۰=۲×۲×۳×۵

واگر در نظر بگیریم:

۶۰=۲×۳۰

در آنصورت ۶×۵=۳۰ و ۳×۲=۶، به‌نحوی که ۳×۲×۵=۳۰؛ یا ۱۵×۲=۳۰ و ۵×۳=۱۵ ، به نحوی که ۵×۳×۲=۳۰؛ یا ۱۰×۳=۳۰ و ۵×۲=۱۰، به نحوی که ۵×۲×۳=۳۰.

می‌بینیم که ۳۰ به هرحال به‌ضرب عاملهای اول ۲ ، ۳ و ۵ تبدیل می‌شود. در نتیجه برای تجزیهٔ ۶۰ به عاملهای اول بدست می‌آید:

۶۰=۲^{۲}×۳×۵

عددهای مرکب دیگر را هم، به همین ترتیب می‌توان به‌صورت ضرب عاملهای اول تجزیه‌کرد (و می توان ثابت کرد که روشهای گوناگون، منجربه تنها یك نوع تجزیه به عاملهای اول می‌شود).

اگر این پرسش در برابر ماباشد که برای آغازکار ازکجا شروع کنیم، کافی است این مطلب را روشن کنیم که همیشه کوچکترین مقسوم علیه یك عدد (به جز ۱)، عددی است اول. در واقع، اگر این کوچکترین مقسوم‌علیه، اول نباشد، به این معناست که درآن مقسوم‌علیه کوچکتری وجود دارد، واین مقسوم‌علیه تازه، مقسوم علیهی از عدد نخستین ماهم خواهد بود. به این ترتیب، اگر همیشه از جستجوی کوچکترین مقسوم علیه آغاز کنیم، عاملهای اول عدد مرکب، یکی پس از دیگری پیدامی‌ـ می‌شود. مثلاً :

$$۹۰ = ۲ \times ۴۵$$

$$۹۰ = ۲ \times \overbrace{۳ \times ۱۵}$$

$$۹۰ = ۲ \times ۳ \times \overbrace{۳ \times ۵}$$

واین تجزیه، کار جستجوی همهٔ عاملهای اول عدد مرکب را به پایان می‌رساند. از اینجا، مثلاً می‌توان فهمید که عدد ۹۰ ، به جز ۱، این مقسوم‌علیه‌ها را دارد:

- مقسوم علیه‌هایی که از یك عامل درست شده‌اند: ۲،۳،۵؛
- مقسوم علیه‌هایی که از دو عامل درست شده‌اند:

$$۲ \times ۳ = ۶،\ ۲ \times ۵ = ۱۰،\ ۳ \times ۳ = ۹،\ ۳ \times ۵ = ۱۵؛$$

- مقسوم علیه‌هایی که از سه عامل درست شده‌اند:

$$۲ \times ۳ \times ۳ = ۱۸،\ ۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰،\ ۳ \times ۳ \times ۵ = ۴۵؛$$

- مقسوم‌علیهی که از چهار عامل درست شده است:

$$۲ \times ۳ \times ۳ \times ۵ = ۹۰$$

منزلگاههای عددهای اول

بهتر است با این عددهایی که همهٔ عددهای دیگر از آنها ساخته شده است، بیشتر آشنا شویم. کوشش می‌کنیم، عددهای اول راپشت‌سر هم بنویسیم. می‌دانیم که نخستین عدد اول برابراست با۲. می‌توانیم‌به دیگر عددهای زوج توجهی نکنیم، زیرا همهٔ آنها بر ۲ بخش‌پذیرند.

عددهای ۳ ، ۵ و ۷ هم اولند.

ممکن است گمان کنیم که عدد ۹ هم اول است، ولی اینطور

نیست، زیرا ۹ بر ۳ بخش‌پذیر است.

ممکن است، به این مناسبت گمان کنیم که از اینجا به بعد کمتر باعددهای اول برخورد می‌کنیم، ولی این گمان هم نادرست است، زیرا عددهای ۱۱ و ۱۳، هردو اولند.

از خواننده خواهش می‌کنم، خودش این زحمت را قبول کند و عددهای اول را، دست کم تا ۵۰ پیدا کند.

برای اینکه راهی برای بازرسی کارخودداشته باشید، منهم این عددها را می‌نویسم. ولی، تنهاباجستجوی خود شماست که می‌توانید بی نظمی ردیف عددهای اول را احساس کنید

دنبالهٔ عددهای‌اول به این ترتیب آغاز می‌شود:

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷

I III V VII XI XIII

ازهمان دوران کهن، روش جالبی، برای نوشتن این دنبالهٔشگفتی آور عددهای اول، پیداکرده بودند، که کار خود را بدون اشتباه وبه‌طور مکانیکی انجام‌می‌داد؛ منظورم روشی است که‌به غربال «اراتوستن» معروف شده است. ابتدا، همهٔ عددها را از ۲ تا ۵۰ می‌نویسیم. روشن است که نخستین عدد این دنباله، اول است؛ به‌این‌موضوع،بدون اینکه به‌خود عدد هم نگاه کنیم، می‌توانیم قانع شویم: اگر نخستین عدد این دنباله، اول نباشد، باید مقسوم علیهی از آنرا قبل از این عدد، در دنباله پیدا کنیم، ولی قبل از این عدد، هیچ عدد دیگری در دنباله وجود ندارد، و

حالا می‌توانیم ببینیم که نخستین عدد این دنباله کدام است: این عـدد برابر است با ۲.

هر عددی که بعد از ۲ ویك در میان قـرار گـرفته باشد، بر ۲ بخش‌پذیراست وبنابراین نمی‌تواند عددی اول باشد. روی این عددها را، در دنبالهٔ خود، یك خط می‌کشیم:

<u>۲</u>	۳	~~۴~~	۵	~~۶~~	۷	~~۸~~	۹	~~۱۰~~	۱۱
~~۱۲~~	۱۳	~~۱۴~~	۱۵	~~۱۶~~	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	~~۲۰~~	۲۱
~~۲۲~~	۲۳	~~۲۴~~	۲۵	~~۲۶~~	۲۷	~~۲۸~~	۲۹	~~۳۰~~	۳۱
~~۳۲~~	۳۳	~~۳۴~~	۳۵	~~۳۶~~	۳۷	~~۳۸~~	۳۹	~~۴۰~~	۴۱
~~۴۲~~	۴۳	~~۴۴~~	۴۵	~~۴۶~~	۴۷	~~۴۸~~	۴۹	~~۵۰~~	

نزدیکترین عدد باقیمانده به ۲، کـه خط نخورده است، بـدون تردید، عددی اول است، زیرا درغیر اینصورت، باید مضربی از یك عدد اول کوچکتر از خود باشد، ولی تنها عدد اول کوچکتر از آن ، همان عدد ۲ است وما هم تمام مضربهای عدد ۲ را خط زده‌ایم. حالا ، به این عدد نگاه می‌کنیم: این عدد برابر است با ۳. هر عدد سومی که بعد از عدد ۳ قرار گـرفته است (یعنی عددهایی کـه بعد از ۳ و دو در میان قرار گرفته‌اند)، مضربی از ۳ هستند؛ به همین مناسبت، ایـن عددها را هم خط می‌زنیم. هیچ تعجبی ندارد، اگـر روی بعضی از عددها، دوبار خط خورده باشد:

۲	۳	~~۴~~	۵	~~۶~~	۷	~~۸~~	~~۹~~	~~۱۰~~	۱۱
~~۱۲~~	۱۳	~~۱۴~~	~~۱۵~~	~~۱۶~~	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	~~۲۰~~	~~۲۱~~
~~۲۲~~	۲۳	~~۲۴~~	۲۵	~~۲۶~~	~~۲۷~~	~~۲۸~~	۲۹	~~۳۰~~	۳۱
~~۳۲~~	~~۳۳~~	~~۳۴~~	۳۵	~~۳۶~~	۳۷	~~۳۸~~	~~۳۹~~	~~۴۰~~	۴۱
~~۴۲~~	۴۳	~~۴۴~~	~~۴۵~~	~~۴۶~~	۴۷	~~۴۸~~	۴۹	~~۵۰~~	

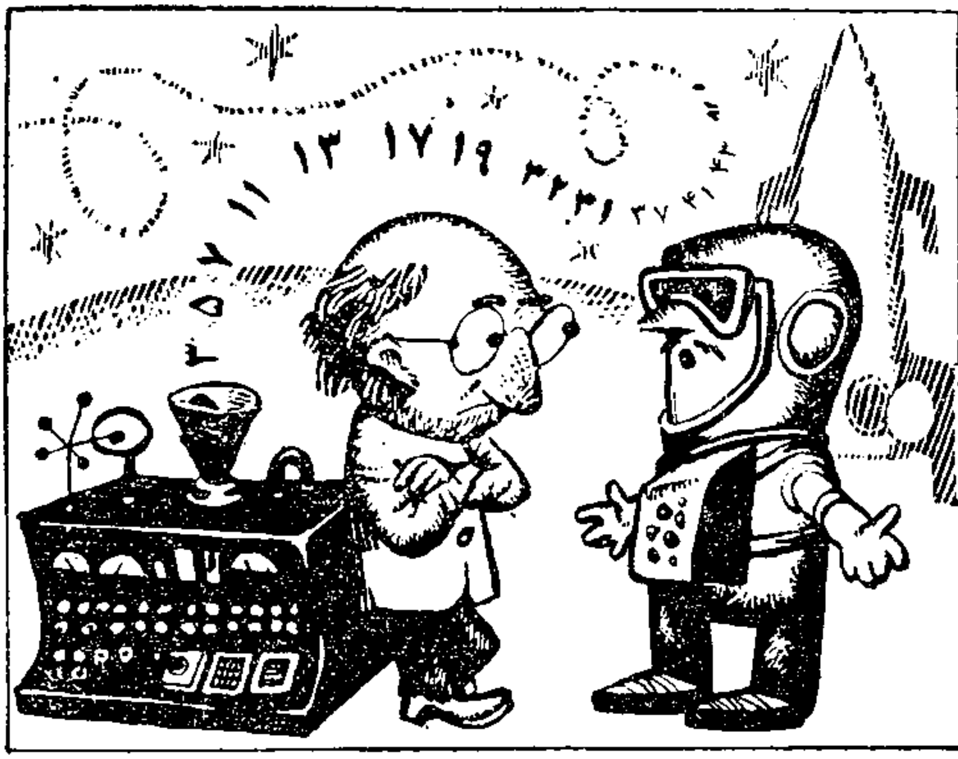
ادامه می دهیم. نزدیکترین عدد باقیمانده، برابر است با ۵. این بار باید عددهایی راکه مضرب ۵ هستند، خطبزنیم. به این ترتیب، همه عددهایی که با شروع از ۵، درردیف پنجم قرار گرفته‌اند وسپس با شروع از۷، هر عددی راکه در ردیف هفتم قرارگرفته‌است، حذف می‌کنیم.

۲	۳	~~۴~~	۵	~~۶~~	۷	~~۸~~	~~۹~~	~~۱۰~~	۱۱
~~۱۲~~	۱۳	~~۱۴~~	~~۱۵~~	~~۱۶~~	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	~~۲۰~~	~~۲۱~~
~~۲۲~~	۲۳	~~۲۴~~	~~۲۵~~	~~۲۶~~	~~۲۷~~	~~۲۸~~	۲۹	~~۳۰~~	۳۱
~~۳۲~~	~~۳۳~~	~~۳۴~~	~~۳۵~~	~~۳۶~~	۳۷	~~۳۸~~	~~۳۹~~	~~۴۰~~	۴۱
~~۴۲~~	۴۳	~~۴۴~~	~~۴۵~~	~~۴۶~~	۴۷	~~۴۸~~	۴۹	~~۵۰~~	

به عددهایی که باقی می‌ماند، لازم نیست توجهی بکنیم، زیــرا، کوچکترین عددی که باقیمانده است، برابر است با ۱۱، و ۱۱مرتبه ۷ ، از ۵۰ بزرگتر است ومضربهای کوچکتر ۱۱ هم‌بین همان عددهایی است که‌قبلاً خط زده‌ایم.

وعددهایی که باقی مانده است، چنین است

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷



مادر واقع، همان عددهایی‌رانوشته‌ایم که‌قبلاً هم‌آنها را به‌عنوان عددهای اول بین ۲ و ۵۰، پیدا کرده بودیم.

ممکن است، به طور کلی، ماشینی ساختهٔ شود که بتواند بدون اشتباه دنبالهٔ عددهای اول را تا هرجایی که بخواهیم، به ما بدهد. ولی، این امکان، هیچگونه تغییری در این وضع نمی‌دهد که دنبالهٔ عددهای اول همه جا، به صورت بکلی بی‌نظمی پراکنده شده‌اند.

مثلاً، می‌توان ثابت کرد که می‌توان دو عدد اول پشت سرهم پیدا کرد، به‌نحوی که فاصلهٔ بین آنها، به هر اندازه‌ای که بخواهیم، باشد، تنها لازم است که درجهت دنبالهٔ عددها به اندازهٔ کافی جلوبرویم. مثلاً، نتیجهٔ عملهای زیر اینست که بین دوعدد اول متوالی، لااقل ۶ افتادگی وجود دارد، یعنی شش عدد پشت سرهم می دهد که هیچکدام اول نیستند:

$۲×۳×۴×۵×۶×۷+۲$، $۲×۳×۴×۵×۶×۷+۳$؛
$۲×۳×۴×۵×۶×۷+۴$، $۲×۳×۴×۵×۶×۷+۵$؛
$۲×۳×۴×۵×۶×۷+۶$، $۲×۳×۴×۵×۶×۷+۷$

این عددها، شش عدد طبیعی پشت سرهم هستند، زیرا هرکدام از آنهایك واحد از عدد قبلی‌بزرگتراست. ضمناً، هیچکدام ازاین عددهااول‌نیستند، زیرا حاصلضرب $۲×۳×۴×۵×۶×۷$ برهرکـدام از عاملهای خود بخش‌پذیراست، بنابراین نخستین عدد برابر با مجموع دوجمله است که هر کدام از آنها بر ۲ بخش‌پذیرند؛ به همین دلیل، عدد دوم بر۳ ، عدد سوم بر۴، عدد چهارم بر ۵، عدد پنجم بر۶ وعدد ششم بر ۷ بخش‌پذیر است. اگر ضربها را انجام دهیم، بدست می‌آید:

$$۲×۳×۴×۵×۶×۷=۵۰۴۰$$

بنابراین، بحث برسر شش عدد زیر است:

۵۰۴۲ ، ۵۰۴۳ ، ۵۰۴۴ ، ۵۰۴۵ ، ۵۰۴۶ ، ۵۰۴۷

و اینهاعددهای نسبتاً بزرگی هستند، می‌بینیم که برای پیدا کـردن دو عدد اول که دست کم شش افتادگی بین‌آنها باشد،بااین‌روش،باید خیلی عمیق در حوزهٔ عددهای طبیعی نفوذ کنیم (روشن است که این موضوع امکان این را ازبین نمی‌بردکه قبل از این عددها، بارها ،چنین افتادگی بین دوعدد اول‌وجود داشته باشد). اگرازبرخورد باعددهای خیلی‌بزرگ نگـران نباشیم، می‌توانیم حتی بـه فاصله‌ای کـه شامل دست‌کم ۱۰۱ افتادگی باشد ،دست‌یابیم. برای این منظور کافی است به حاصلضرب

$$۲×۳×۴×۵×...×۱۰۱$$

به ترتیب عددهای از ۲ تا ۱۰۱ را اضافه کنیم. باهمین روش می‌توان به هر فاصلهٔ دلخواهی، بین دوعدد اول پشت سرهم رسید.

با وجود این، هرقدر که به عمق عددها بیشتر فرورویم و فاصلهٔ دوعدد اول پشت سرهم را هرقدر بزرگ بگیریم، بازهم دوباره عددهای اول همسایه‌ای پیدا می‌شود که مثل ۱۱ و ۱۳ یا ۲۹ و ۳۱، به صورت دوعدد فردمتوالی، درکنارهم قرارگرفته‌اند. ریاضیدانها، گمان می‌کنند که این «زوجهای همسایه» عددهای اول، همه جا وهر قدرکه در دنبالهٔ عددها پیش‌برویم، وجود دارد، ولی هنوز اثبات کاملی برای این‌موضوع پیدا نشده است.

قضیهٔ مربوط به منزلگاههای عددهای اول

آیا دردنبالهٔ عددهای‌طبیعی هرقدرکه جلو برویم، بازهم‌عددهای اول وجود دارد؟ آیاآنها تنها در قسمتی ازدنبالهٔعددهامنزل نکرده‌اند؟

پاسخ به‌این پرسش را در دوهزار سال پیش هم داده‌اند. اقلیدس، خیلی ظریف وزیبا ثابت کرد که بینهایت عـدد اول وجود دارد. شبیه خود رشتهٔ عددها، دراینجا هم کاملاً متقاعد خواهیم شد. اگرکسی‌بگوید «اینجا پایان خط است»، من بلافاصله می‌توانم ثابت کنم ترانه به‌پایان نرسیده است، که عددهای اولی در خارج این مرزهم وجود دارد.

کافی است که این موضوع را تنها برای یك حالت ثابت‌کنیم، آنوقت بـرای هرحالت دیگر هم می‌توانیم بـه همان ترتیب عمل کنیم. برای اثبات، تنها باید به این حقیقت توجه کنیم که در دنبالهٔ عددهای طبیعی، هردوعدد، یکی بر۲، هرسه عدد، یکی‌بر۳ بخش پذیراست‌وغیره. وهمچنین عددی که بلافاصله‌بعد از مضرب ۲ قرارگرفته است بر۲بخش

پذیر نیست، عددی که بلافاصله بعد از مضرب ۳ قرار گرفته است، بر ۳ بخش‌پذیر نیست وغیره.

حالا، اگر کسی ادعا کند که به‌جز

۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷

عدد اول دیگری وجودندارد، می‌توان به سادگی آنرا ردکرد. به‌کمك این عددهای اول، عدد

۲×۳×۵×۷+۱

را تشکیل می‌دهیم. عدد ۲×۳×۵×۷ بر ۲، ۳، ۵و۷ بخش‌پذیراست. بنابراین، عدد ۲×۳×۵×۷+۱، که عدد بلافاصله بعد از آنست، نمی‌تواند برهیچکدام از این عددها بخش پذیر باشد. ولی، این عدد باید به هرحال دارای عامل اولی باشد؛ یعنی، یا بتواند به ضرب چندعامل اول تجزیه شود، ویاخودش عددی اول باشد. به‌این ترتیب، ادعای کسی که گفته است به جز ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ عدد اول دیگری وجود ندارد، نقض می‌شود: باید عددهای اولی بزرگتر از ۷ وجود داشته‌باشد. به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که باید عددهای اولی، بزرگتر از هرعدد اول دلخواه وجود داشته‌باشد.

حالا، عدد ۲×۳×۵×۷+۱ را محاسبه می‌کنیم. این‌عددبرابر است با ۲۱۱. اگر بخواهیم این عدد را به صورت ضرب عاملهای اول تجزیه‌کنیم، متوجه می‌شویم که به‌جز ۱وخودش، برهیچ عدد دیگری بخش پذیر نیست. به این ترتیب، تصادفاً خود این عدد، اول است وهمان عدد اولی است که از ۷ بزرگتر است و ما دنبال اثبات‌وجودآن بودیم.

روشن است که گفتگو از این نیست که این عدد ، نخستین عدد اولی است که بعد از ۷ قرار گرفته است . ما نباید به این روش دل ببندیم و گمان کنیم که به کمك آن می‌توان دنبالهٔ عددهای اول را پیدا کرد.

این روش استدلال، به این نتیجه منجر می‌شود که ما را از عدد ۷ به عدد ۷×۵×۳×۲ واز عدد ۱۱ به ۱۱×۷×۵×۳×۲ برساند وبه‌کمك این عددهای جدید، عددهای اول تازه‌ای بدست آید. ولی ، فاصلهٔ بین این عددهای اول ، خیلی زیاد است. آیا نمی‌شود، عددهای اول را در فاصلهٔ کوتاهتری بدست آورد؟

خیلی از ریاضیدانها به این مسأله مشغول شده‌اند، و ما در اینجا تنها یکی از زیباترین نتیجه‌هایی را که بدست آمده است، می‌آوریم: چبیشف ، ریاضیدان روسی، ثابت کرد که بین هرعدد (به‌جز ۱) ودوبرابر آن، همیشه عدد اولی وجود دارد:

بین ۲ و ۴	۳
بین ۳ و ۶	۵
بین ۴ و ۸	۵ و ۷
بین ۵ و ۱۰	۷

اگرچه‌هیچ قانون دقیقی دراینجا دیده نمی‌شود، ولی این پدیده‌همیشه و هرقدر که در دنبالهٔ عددهای طبیعی جلو برویم،به قوت خود باقی‌است. اگر عددها را به‌اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب کنیم، بین این عددها ودو برابر آنها، حتی به تعداد دلخواه عدد اول وجود خواهد داشت.

بنابراین،به نظر می‌رسد که عددهای اول، قانون مخصوص به خودی دارند که ظاهراً عجیب ونظم ناپذیراست. باوجود این، «قانونی

برای منزلگاههای عددهای اول» وجوددارد که تقریبی وغیر دقیق است، درست مثل وقتی کـه دایره را به عنوان شکلی کـه از مثلثهای باریـك کوچکی تشکیل شده است درنظر بگیریم (قبلاً هم گفته‌ام دربارهٔمفهوم دقیق این «تقریب» به موقع خود،گفتگو خواهیم کرد).

تا ۲، یك عدد اول وجود دارد و آن خود عدد ۲ است. تا ۳، دو عدد اول وجود دارد: ۲ و ۳؛ تا ۴، بازهم دو عدد اول؛ تا ۵، سه‌عـدد اول، زیراخود عدد ۵ هم اول است؛تا ۶، همان سه عدد؛ تا ۷، چهارعدد اول، یعنی ۲،۳،۵ و ۷ ، تا ۸، همینطور تا ۹ وتـا ۱۰، همان‌چهار عـدد اول وجود دارد وغیره. به این ترتیب، تعداد عددهای اول برابر است‌با:

تا ۲	تا ۳	تا ۴	تا ۵	تا ۶	تا ۷	تا ۸	تا ۹	تا ۱۰
۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۴	۴

عددهای این دنباله، تنها وقتی بزرگ می‌شوند که به عدد اول تازه‌ای برسیم، و این پیش آمدهم‌به کلی نا منظم است. با وجود این، می‌توان دنباله‌ای نوشت که‌بتوان‌طبق قانون‌معینی جمله‌های‌آنرا پیداکرد[1] ودارای این ویژگی باشدکه هر چه جلوتر رویم، جمله‌های‌آن به‌جمله‌های دنبالهٔ مورد نظر ما نزدیك ونزدیکتر شود.

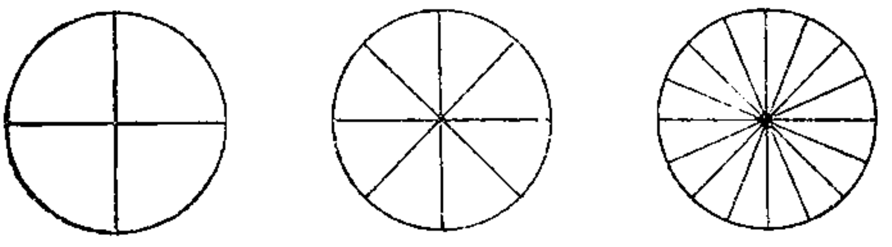
---

۱. برای کسانی که معنای لگارتیم را می‌دانند، این دنباله را در اینجا می‌آورم:

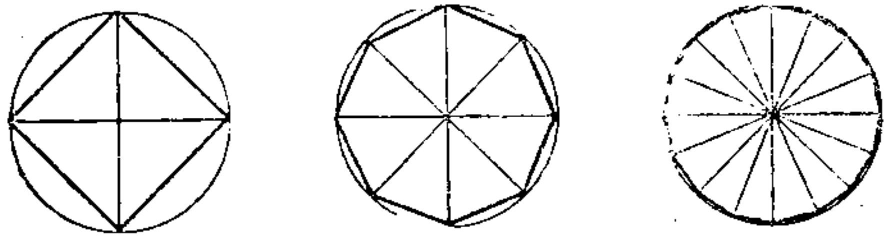
$$\frac{۲}{\log ۲}, \frac{۳}{\log ۳}, \frac{۴}{\log ۴}, \frac{۵}{\log ۵}, \ldots$$

لگارتیمایی که در این دنباله وجود دارد، لـگارتیم طبیعی هستند. ما، در بارهٔ لگارتیم طبیعی، در این کتاب گفتگو خواهیم کرد.

قسمتهای دور این دنباله را می‌توان «تقریباً» یکـدست به‌حساب آورد، همانطور کـه قطاعهای یك دایره، وقتی کـه تعداد آنها مـرتباً زیاد می‌شود



به مثلثهایی که‌به خطهای راست محدود شده‌اند، شبیه‌تروشبیه‌ترمی‌شود:



اگر نقسیم دایره را به اندازهٔ کافی ادامه دهیم، می‌توانیم قطاعهای دایره را با مثلثهای متناظرآنها، «تقریباً »مساوی بدانیم.

اگرچه نمی‌توان قانون دقیقی برای عددهای اول به‌سادگی بدست آورد، ولی همین رفتار «تقریباً» منظم آنها، معنای دقیقی دارد که مـا بازهم، کمی بعد، دربارهٔ آن گفتگو خواهیم کرد.

من تلاش نخواهم کرد که حتی به طور تقریبی قضیهٔ مربوط به منزلگاههای عددهای اول‌راثابت کنم. ازقدیم، برجسته‌ترین‌ریاضیدانها، این اثبات را دست به دست کرده‌اند و بـه تدریج آنرا دقیتقر وکاملتر کرده‌اند، تا سرانجام آنرا به صورت امروزی در آورده‌اند.

ریاضیدانها تلاش می‌کنند تا هر چه دقیقتر، میزان اشتباهی را معین کنند که از جانشین کردن دنبالهٔ نامنظم عددهای اول، به‌وسیلهٔ دنباله‌ای که بنابر قاعدهٔ معینی تشکیل شده است، پیدا می‌شود. انگیزهٔ کارهای تحقیقی در این مورد نه به خاطر فایدهٔ آنست و نه به خاطر مصلحت ریاضیات، بلکه به خاطر ظرافت ودشواری موضوع آنست.این ظرافت هیچ شباهتی به آنچه که در حوزه آنالیز ترکیبی به‌آن برخورد کردیم، ندارد. این، ارضای حسن زیبایی شناسی بی‌پایانی است که‌بنابر آن، بشر می‌خواهد به هر قانونی، هر چقدرهم که بی‌نظم باشد دست‌یابد وآنرا در اختیار خود بگیرد.

قضیهٔ مربوط به منزلگاههای عددهای اول، حاکی از اینست که اگر عددهای اول را در ابتدای دنبالهٔ عددهای طبیعی وتا آنجا که در دسترس هستند، در نظربگیریم، از هیچ نظمی پیروی نمی کنند، ولی،



اگراین دنباله را به عنوان یك مجموعهٔ نامتناهی بررسی کنیم، نوعی نظم در عددهای آن آشکار می‌شود. وقتی که‌شما به پرواز جمعی‌زنبورها نگاه‌کنید، به‌نظرتان می‌رسدکه حشره‌های جداگانه، در جهتهای کاملاً متفاوت‌حرکت می‌کنند؛ ولی اگرآنها رابه‌عنوان‌یك واحد درنظربگیریم، می بینیم که هدف مشخصی دارد و به سمت معینی جلو می‌رود.

۸. عددی پیش خود فکرکنید

به ریاضیات کاربسته برمی‌گردیم. ما دیگر می‌توانیم حجم‌مکعب را محاسبه کنیم. گاهی هم لازم است، حجم جسمی را بدست آوریم‌که شکل‌آن نظمی ندارد. ولی، حجم چنین جسمهایی را نمی‌توانیم مستقیماً پیدا کنیم. در اینگونه موارد روش پیداکردن جواب، بستگی به نوع پرسش دارد. فرض کنید که بخواهیم حجم یك جسم چوبی را پیداکنیم. وزن آنرا می‌توانیم بدست آوریم. سپس، ازهمان نوع چوب، مکعبی‌به حجم یك سانتیمتر مکعب درست وآنرا وزن می‌کنیم.

در اینصورت، جسم مورد نظر ما هرچند برابر مکعب واحد وزن داشته باشد، همانقدر سانتیمتر مکعب حجم خواهد داشت.

معادله

همانطورکه می‌بینید، دراینحالت نمی‌شود حجم رابه طورمستقیم معین کرد، بلکه این حجم را از بستگی‌که بین حجم و وزن جسم‌وجود دارد، بدست می‌آوریم. یعنی ابتدا وزن جسم را پیدامی‌کنیم‌وسپس به یاری آن به محاسبهٔ حجم، که مورد نظرماست، می‌پردازیم.

در ریاضیات چنین وضعی غالباً پیش می‌آید، یعنی یك‌کمیت رانمی‌توان

مستقیماً بدست آورد، بلکه باید آنرا از رابطه‌هایی که این کمیت در آنها صدق می‌کند، پیدا کرد. از این رابطه‌هاست که ما می‌توانیم مقدار کمیت مجهول را بدست آوریم.

چنین اندیشه‌ای در بارهٔ عمل، که دربسیاری از رشته‌های مربوط به فعالیت آدمی، نقش جدی و تعیین کننده دارد، در واقع، هیچ تفاوتی با «معماهای» عددی، که همه باآن آشنا هستیم، ندارد: عددی درنظرمی گیریم، همانقدر به‌آن اضافه می‌کنم، حاصل را سه برابر می‌کنم وغیره. بعد از آنکه یک رشته عمل را پشت سرهم دربارهٔ عددی که در نظر گرفته‌ام، انجام دادم، نتیجهٔ آخر را اعلام می‌کنم (مثلاً ۳۶) و از شما می‌خواهم، عددی را که در ابتدا فکر کرده بودم، به من بگویید.

مثلاً، اگربگویم، به عددی‌که فکرکرده‌ام، ۵ واحد اضافه‌کرده‌ام و ۷ بدست آمده است، هرکسی بلافاصله پاسخ می‌دهد که عدد اصلی برابر ۲ بوده است.

حالا، به مسالهٔ دشوارتری‌می‌پردازیم. من عددی را درنظرگرفته‌ام آنرا در ۵ ضرب کرده‌ام، نتیجه را نصف کرده‌ام، بعد ۳ واحد به‌آن اضافه کرده‌ام، عدد ۱۸ بدست آمده است. عدد اصلی کدام است؟

معمولاً اینگونه‌معماها، به‌طورشفاهی طرح می‌شود وطبیعی‌است، کسی که باید پاسخ را بدهد، نتواند همهٔ آنچه را که می‌شنود، درخاطر خود نگه‌دارد. بنابراین، بهترین راه اینست که شرطهای معما، بلافاصله نوشته شود. عددی‌که درنظرگرفتهٔ شده است، برای شنونده معلوم‌نیست ومی‌تواند آنرا با x نشان دهد. بعد، عملها را به ترتیب انجام می‌دهد: دوستش عدد x را در نظر گرفته وآنرا در ۵ ضرب‌کرده است، تا اینجا می‌شود $5x$. سپس نتیجه را نصف کرده‌است، که می‌شود $\frac{5x}{2}$. سرانجام،

۳ واحد به آن اضافه کرده است، بدست می‌آید $\frac{5x}{2}+3$ و می‌گوید که نتیجهٔ همه این عملها برابر با ۱۸ شده است:

$$\frac{5x}{2}+3=18$$

عددی که در نظر گرفته شده است، در این معادله صدق می‌کند و بایدبه کمك آن، پیدا شود.

آدمهایی هستندکه ذهن پرتوان‌آنها، ازعهدهٔ هرگونه محاسبه‌ای برمی‌آید وچنین معادله‌هایی را به سادگی حل می‌کنند. ولی، کسانی‌هم که چنین نیرویی را ندارند، می‌توانند، معادله را گام به گام حل‌کنند: وقتی‌که به عددی ۳ واحداضافه‌کرده‌ایم، ۱۸ بدست‌آمده است؛ بنابراین، این عدد ۱۵ بوده است:

$$\frac{5x}{2}=15$$

حالا دیگر مقدار x را ساده‌تر می‌توان پیدا کرد. ولی، اگرباز هم، پیدا کردن x برایمان دشوار باشد، می‌توان بابرداشتن‌گام بعدی، آنرا ساده‌تر کرد: وقتی که نصف عددی مساوی ۱۵ باشد، خود آن عدد، مساوی ۳۰ می‌شود:

$$5x=30$$

حالا دیگر هرکسی می‌تواند متوجه شودکه‌وقتی پنج برابر عددی‌مساوی ۳۰ شده است، خود آن عدد، به جز ۶، چیز دیگری نمی‌تواند باشد.

باهمین روش، یعنی گذار از یك مرحله به‌مرحلهٔ دیگر، می‌توانیم

هر معادله‌ای را حل کنیم. وقتی از معادلهٔ

$$\frac{۵X}{۲}+۳=۱۸$$

به معادلهٔ

$$\frac{۵X}{۲}=۱۵$$

می‌رسیم، به این معناست که از سمت چپ علامت تساوی، جملهٔ ۳ را حذف کرده‌ایم وهمراه با آن، عددسمت راست تساوی را هم، بـه‌اندازهٔ ۳ واحد کوچك کرده‌ایم. در بارهٔ این عمل، معمولاً اینطور می‌گویند: جمله‌ای را که در یك طرف معادله باشد، می‌توان به طرف دیگرمعادله، به عنوان جملهٔ دوم تفریق، منتقل کرد.

وقتی که از معادله

$$\frac{۵X}{۲}=۱۵$$

به معادلهٔ

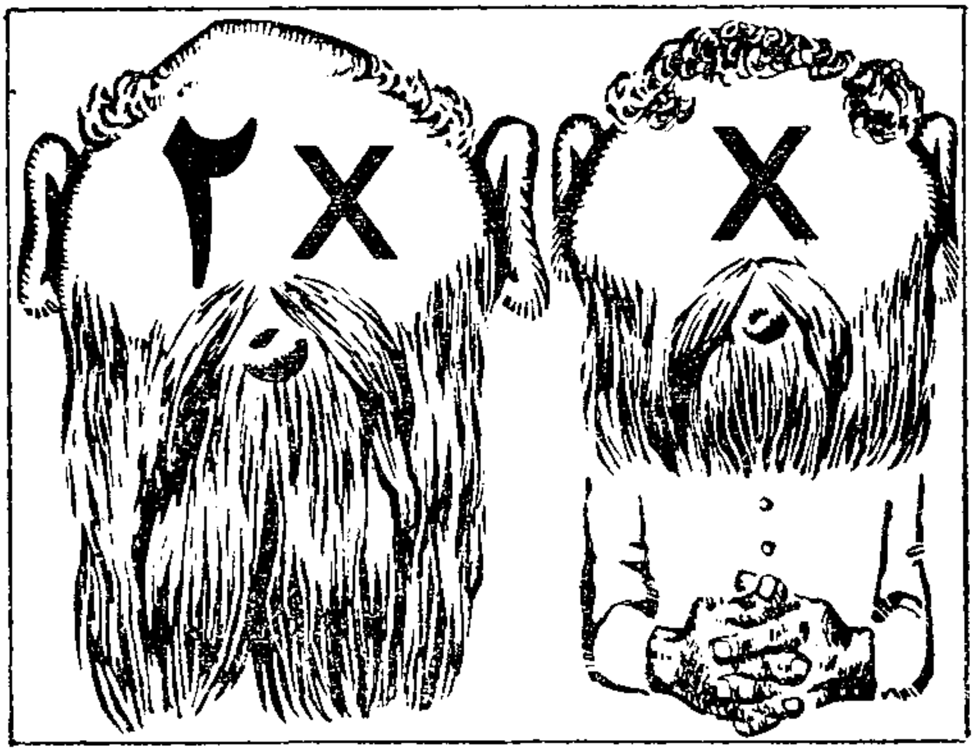
$$۵X=۳۰$$

می‌رسیم، به‌معنای آنست که‌درسمت چپ تساوی، مخرج راحذف کرده‌ایم وهمراه باآن، عدد سمت راست تساوی را دوبرابر کرده‌ایم. دربارهٔ این عمل هم می‌گویند: مقسوم علیه را می‌توان به طرف دیگر معادله ، بـه عنوان یك عامل ضرب، منتقل کرد.

به طور کلی، می‌توان هر عبارتی را از یك طرف معادله،به‌طرف

دیگر آن منتقل کرد، به شرطی که نوع عمل را به‌عکس آن تبدیل کنیم.

اگر حتی به یك معادلهٔ به‌ظاهرپرحیله‌ای برخورد کنیم، همهٔ آنچه راکه دربارهٔ کشف یك عدد گفتیم، به قوت خود باقی‌می‌ماند. مثلاً، فرض کنید که مسأله، چنین باشد: «پدر ۴۸ سال وپسر ۲۳ سال دارد، بعد از چند سال، سن پدر، دو برابر سن پسر می‌شود؟»



بسیاری، جواب را، بلافاصله وبدون تشکیل معادله، پیدامی‌کنند. ولی، اگر کسی، چنین سرعت انتقالی در محاسبه نداشته باشد، باید به‌معادله متوسل شود.

در این معما، عددی در نظر گرفته شده است که من اطلاعی ازآن ندارم، یعنی این عدد برابر است با x . به زبان دیگر، بعداز x سال، سن پدر دو برابر سن پسر می‌شود. ولی چگونه باید این پاسخ را جستجو

کرد؟

کسی هم که جواب را در ذهن خود بدست مـی‌آورد، پیش خود حساب می‌کند که بعد از x سال، سن پدر وپسر چقدر است ومی‌بیند که در واقـع هم ، در آن موقـع، تعداد سالهای سن پـدر دو برابـر تعداد سالهای سن پسر است. بعد از x سال ، پـدر x سال بـزرگتر مـی‌شود یعنی(۴۸+x) سال‌دارد؛ پسرهم‌بعد از x سال، (۲۳+x) ساله‌می‌شود. بنابراین، محاسب زبردست ما، به عددی فکر کرده است که اگر به ۴۸ و۲۳ اضافه شود، نتیجهٔ اولی، دو برابر نتیجهٔ دومی باشد:

$$۴۸+x=۲\ (۲۳+x)$$

واز همین معادله است‌که باید x را بدست‌آورد. درطرف راست‌تساوی، می‌توان عمل ضرب در ۲ را انجام داد، به‌این ترتیب‌که ۲ را درهرکدام از جمله‌های مجموع داخل پرانتز ضرب کرد:

$$۴۸+x=۴۶+۲x$$

عدد مجهول x را که در سمت چپ تساوی است، به عنوان مفروق، بـه سمت راست تساوی می‌آوریم و در ردیف ۲x قـرار می‌دهیم. همینطور، عدد ۴۶ را، باز هم به عنوان مفروق، به سمت چپ تساوی می‌بریم ودر کنار ۴۸ می‌گذاریم. به این ترتیب ، جمله‌های شامل مجهول x دریـك طرف وجمله‌های عددی در طرف دیگر تساوی قرار می‌گیرد:

$$۴۸-۴۶=۲x-x$$

روشن است که ۲ = ۴۶ − ۴۸ وهمچنین اگر از ۲x به اندازهٔیك

x کم‌کنیم،یك x بدست می‌آید. به این نتیجه می‌رسیم:

$$۲=x$$

یعنی، بعد از دوسال، سن پدر دوبرابر سن پسرمی‌شود. درواقع، بعد از ۲ سال، پدر ۵۰ ساله وپسر ۲۵ ساله می‌شود.

کاررا باز هم پیچیده‌تر می‌کنیم. «من دوعدد را با هم درنظر گرفته‌ام که مجموع آنها مساوی ۱۰ شده است. این عددها کدامند؟»

برای اینکه این مساله رابنویسیم، عددهایی را در نظرگرفته‌شده، x و y می‌نامیم. به این ترتیب در مسألهٔ ما، تاکید شده است که

$$x+y = ۱۰$$

خیلی ساده می‌توان دو عدد از اینگونه را جستجو کرد: مثلاً، عددهای ۱و۹ دارای چنین‌خاصیتی هستند.ولی، ۲ و۸هم، همین‌خاصیت را دارند! عددهای ۴ و ۶ را هم می‌توان به عنوان دو عدد موردنظر،به حساب آورد؛ وهمینطور جوابهای دیگری هم وجود دارد. بله! این یك فریب واقعی است: با آگاهی که‌داده شده است، نمی‌توان دوعدد راپیدا کرد. کاملاً حق داریم از طرح کنندهٔ معما بخواهیم:

ـبازهم چیزهایی دربارهٔ این دو عدد بگو!

ـبسیار خوب، اضافه می‌کنم‌که تفاوت این دوعددبرابراست‌با۲:

$$y-x=۲$$

حالا دیگر می‌توانیم به راحتی کشف کنیم که تنها دو عدد وجود دارد که با این شرطها می سازد. این دو عدد عبارتند از ۴ و ۶،که‌درواقع‌هم مجموع آنها مساوی ۱۰ وتفاوت آنها مساوی ۲ است.

برای‌اینکه بتوانیم دو عدد مجهول را «کشف» کنیم، به‌دومعادله ویا به اصطلاح به یك دستگاه معادله‌ها، نیاز داریم. اگر کشف دو عدد، دشوار به نظر برسد، در اینجا هم می‌توان از قاعده‌های مشخصی استفاده کرد.

فرض می‌کنیم که کسی نتوانسته باشد جوابهای ۴ و ۶ دستگاه معادله‌ها را، حدس بزند، در اینصورت او باید این راه را انتخاب کند: اگر در معادلهٔ اخیر، مفروق را از سمت چپ تساوی، به جای اول خود در سمت راست تساوی‌برگردانیم، در سمت چپ، تنها y باقی می‌ماند:

$$y=x+۲$$

از اینجا معلوم می‌شود که عدد دوم، دو واحد از عدد اول بزرگتر است. بنابراین، مسألهٔ رامی‌توان به‌صورت ساده‌تری تنظیم کرد: «عددی درنظر گرفته‌ام، اگر عددی را که ۲ واحد بزرگتر است به آن اضافه کنم،عدد ۱۰ بدست می‌آید. کدام عدد را در نظر گرفته‌ام؟»

این مسأله را می‌توان اینطور نوشت:

$$x+(x+۲)=۱۰$$

که درآن، تنها با یك مجهول سروکار داریم و ما هم از روشهایی که برای جستجوی یك مجهول به‌کارمی‌رود،آگاهی داریم. ووقتی‌که مقدار x معلوم باشد، به سادگی می‌توان y را پیداکرد: y به اندازهٔ ۲ واحد از x بیشتراست.

نمونه‌ای دیگر: «دوعدد در نظر گرفته‌ام: عدد اول را به دوبرابر عدد دوم افزوده‌ام، عدد ۱۱ بدست آمده‌است؛ سپس دوبرابر عدد اول را

به چهار برابر عدد دوم اضافه‌کرده‌ام ۲۲ بدست آمدهٔ است. کدام‌عددها را در نظر گرفته‌ام؟ »

تمام این متن را می‌توان به طور خلاصه چنین نوشت:

$$x+۲y=۱۱$$

$$۲x+۴y=۲۲$$

هر خواننده‌ای که به این معادله نگاه‌کند، خیلی زود متوجه می‌شودکه در واقع، آنها دومعادله نیستند. در این باره آزمایش کنیم: عـددهای ۱و ۵ در معادلهٔ اول صدق می‌کنند، زیرا

$$۱+۲\times۵=۱۱$$

همین عددها، در معادلهٔ دوم هم صدق می‌کنند، زیرا

$$۱\times۲+۵\times۴=۲۲$$

ممکن است،گمان کنیم که اینها، همان عددهایی هستند که از ابتدا در نظرگرفته شده بود. ولی، اینطورنیست! عددهای ۳ و ۴ درشرط معادله اول صدق می‌کنند، زیرا

$$۳+۲\times۴=۱۱$$

همین عددها، در معادلهٔ دوم هم صدق می‌کنند:

$$۲\times۳+۴\times۴=۲۲$$

به‌نظر می‌رسد، هردو عددی که در معادلهٔ اول صدق‌کنند، در معادلهٔدوم هم صدق می‌کنند. شرط دوم، این امکان را نمی دهـد کـه یك زوج عدد

مشخص انتخاب کنیم. دلیل این وضع روشن است! x و y هرچه باشند، همیشه عدد ۲x دو برابر عدد x، و ۴y همیشه دو برابر ۲y است. به این ترتیب، مجموع ۲x+۴y باید دو برابر مجموع x+۲y باشد. چون x+۲y برابر ۱۱ شده، ۲x+۴y تنها می‌تواند برابر ۲۲ باشد. یعنی، معادلهٔ دوم، هیچ آگاهی تازه‌ای در بارهٔ دو عددی که در نظر گرفته شده است، به ما نمی‌دهد: معادلهٔ دوم، همان معادلهٔ اول است، منتهی به صورتی پیچیده تر.

وقتی که مسأله، x و y را از دستگاه معادله‌های

x+۲y= ۱۱

۲x+۴y=۲۳

خواسته باشد، نیرنگ بازهم بیشتری به کار رفته است. در این جستجو، حتی ممکن است شما دچار سردرد بشوید، زیرا هیچ دو عددی وجود ندارد که در این دو معادله صدق کند. ما دیدیم که ۲x+۴y برای همهٔ مقادیر x و y، همیشه دو برابر x+۲y است. وقتی که x+۲y برابر ۱۱ باشد، ۲x+۴y باید برابر ۲۲ بشود و بنابراین نمی‌تواند برابر ۲۳ باشد. معادلهٔ دوم، دروغ معادلهٔ اول را فاش می‌کند.

آنچه را که گفته‌ایم، جمع بندی کنیم: دومجهول را زمانی می‌توان از دو معادله بدست آورد که پیام دو معادله، یکی نباشد، یا پیامهای یکدیگر را نقض نکنند.

حالا، برای حل این معما کوشش می‌کنیم: «عددی در نظر گرفته‌ام، هشت برابر این عدد را به مربع آن اضافه کرده‌ام، ۹ بدست آمده‌است». می‌نویسیم:

$$x^۲+۸x=۹$$

در اینجا، تنها یك مجهول وجود دارد، ولی با دشواری تازه‌ای روبرو هستیم: این مجهول بـه توان ۲، رسیده‌است. ما بـا معادلهٔ درجهٔ دوم سروکار داریم.

از ساده‌ترین نوع معادلهٔ درجهٔ دوم، آغاز کنیم. مثلا، معادلهٔ

$$x^۲=۱۶$$

را انتخاب می‌کنیم. هرکسی، متوجه می‌شودکه عدد مورد نظر برابراست با ۴، زیرا اگر ۴ را به توان ۲ برسانیم، عدد ۱۶ بدست می‌آید. مسالهٔ

$$(x+۳)^۲=۱۶$$

هم، مسالهٔ ساده‌ای است، زیرا عددی کـه توان دوم آن ۱۶ باشد، برابر است با ۴ وبدست می‌آوریم:

$$x+۳=۴$$

واز آنجا بلافاصله معلوم می‌شود که $x=۱$.

در اینجا، ما باعبارت $(x+۳)^۲$ سروکار داریم. به‌یادمی‌آوریم که مربع مجموع دوجمله را چگونه بدست می‌آوردیم: مربع جملهٔ اول (که در اینجا $x^۲$ می‌شود)، به اضافهٔ دو برابر حاصلضرب دو جمله (که در اینجا $۶x$ می‌شود) به‌اضافهٔ مربع جملهٔ دوم (که دراینجا ۹ می‌شود). در اینصورت، معادلهٔ ما به این شکل در می‌آید:

$$x^۲+۶x+۹=۱۶$$

و وقتی که معادله‌ای به این صورت داده شده باشد، به‌سادگی‌می‌فهمیم

که چگونه باآن عمل کنیم: باید سه جمله‌ای سمت چپ تساوی را به صورت توان دوم یك دوجمله‌ای بنویسیم. مثلاً، اگر معادله‌ای را به اینصورت داده باشند:

$$x^۲+۸x+۱۶=۲۵$$

باید کشف کنیم که $۸x=۲\times۴x$ و ۱۶ هم مربع کامل است وبنابراین

$$x^۲+۸x+۱۶=x^۲+۲\times۴x+۴^۲=(x+۴)^۲$$

از آنجا، معادلهٔ ما به صورت

$$(x+۴)^۲=۲۵$$

در می‌آید؛ که‌حل‌آن کاملاً شبیه‌معادله‌ای که‌دربالا داشتیم،انجام‌می‌شود.

روشن است که اگردر معادله، عدد ۱۶ را به طرف دوم‌می‌بردیم و تفاضل ۱۶ − ۲۵ ، یعنی ۹ را می‌نوشتیم، در اساس حل آن تفاوتی به وجودنمی‌آمد. دراین‌حالت،معادلهٔمابه‌صورتی‌که‌معمولاً داده‌می‌شود. یعنی

$$x^۲+۸x=۹$$

در می‌آمد؛ به‌سادگی‌می‌توان توجه‌کردکه باید سمت چپ‌معادله را،تا مجذور کامل یك دوجمله‌ای تکمیل کنیم. اگر در سمت چپ تساوی جملهٔ $۱۶=۴^۲$ وجود داشته باشد، به‌صورت $(x+۴)^۲$، یعنی‌مجذور یك دوجمله‌ای درمی‌آید. می‌دانیم‌که اگربه دو مقدار مساوی، یك‌مقدار اضافه کنیم، همچنان مساوی باقی می‌مانند؛ به دوطرف تساوی، عدد ۱۶ را اضافه می کنیم:

$$x^۲+۸x+۱۶=۹+۱۶$$

ودر نتیجه، به همان شکلی می‌رسیم که حل‌آن بـرایمان دشوار نیست.

تکمیل یك چنین دوجمله‌ای تا مجذورکامل ، همیشه ممکن‌است. اگر جملهٔ درجهٔ دوم به صورت x^2 نباشد و مثلاً به صورت $۳x^۲$ باشد، مثل معادلهٔ

$$۳x^۲ + ۲۴x = ۲۷$$

آنوقت، قبل از همه، دو طرف معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم. درواقع، اگرمقادیرسمت راست وسمت چپ معادله باهم برابر باشند، درآنصورت ثلث این مقادیرنیز باهم برابر خواهند بود، ثلث $۳x^۲$ مساوی $x^۲$، ثلث $۲۴x$مساوی $۸x$ وثلث ۲۷ مساوی ۹ می‌شود وبنابراین بدست می‌آید:

$$x^۲ + ۸x = ۹$$

ومعادلهٔ به این شکل را هم می‌توانیم حل کنیم.

اگر همهٔ عددهایی که دراینجا باآنها سروکارداریم،بر۳بخش‌پذیر نباشند ویا اگر ضریب x عددی‌زوج نباشد،درآنصورت با عددهای‌کسری برخورد خواهیم کرد. لزومی ندارد که در این باره نمونه‌هایی بیاوریم زیرا هیچ دشواری ویژه‌ای پیدا نمی شود. به این ترتیب، معادلهٔ ما به‌هر صورتی که باشد، می‌توان سمت چپ آنرا به توان دوم یـك دوجمله‌ای تبدیل کردوآنرا به صورت آشنایی درآورد که حل آن بـرایمان ممکن باشد.

اینگونه راه حلها، ازویژگیهای روشهای ریاضیات است :وقتی که مسأله‌ای در برابرریاضیدان قرار می‌گیرد، بلافاصله وبه طورمستقیم به حل آن نمی‌پردازد، بلکه‌آنرا آنقدر تغییر می‌دهد تا به مسأله‌ای‌برسد

که قبلاً آنرا حل کرده است وروشن است که انگیزهٔ همه اینها «راحتی در محاسبه» است.

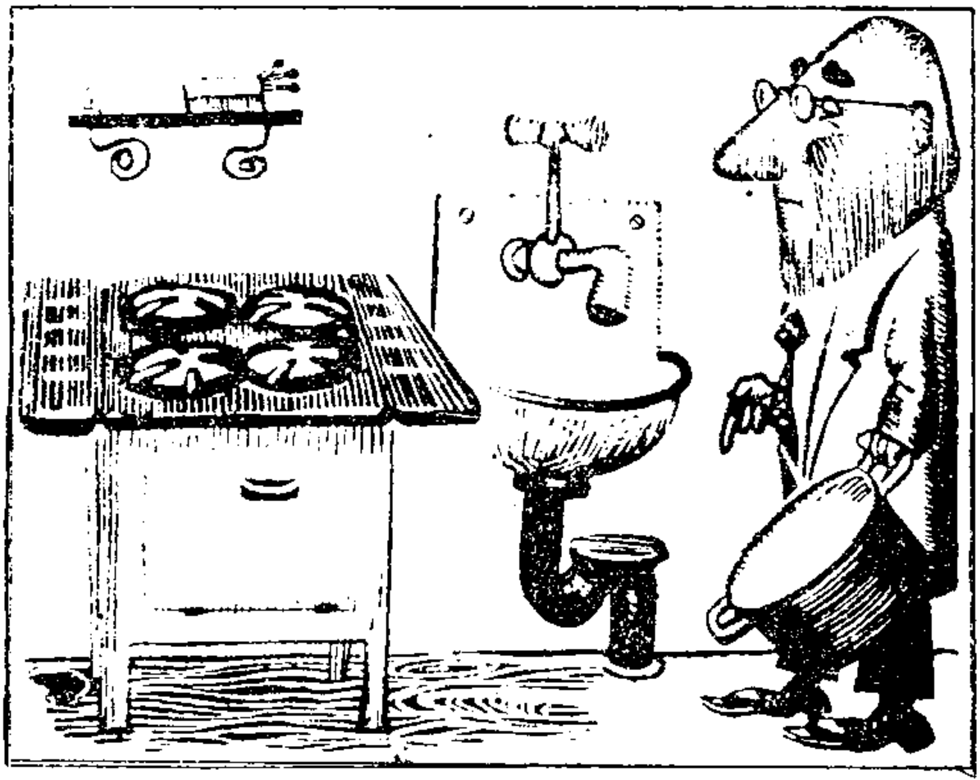
طرح کاریکاتوری این روش را می‌توان به وسیلهٔ این معما ـ که برای ریاضیدانها معروف است ـ داد: «درمنزلتان اجاق گاز دارید، آب در شیر است، قوطی کبریت و دیگ هم آماده است. می خواهیم آب را بجوشانیم. چگونه این کار را انجام می‌دهید؟»

پاسخ بالحنی‌نه‌چندان‌مطمئن داده می‌شود: «گاز راروشن‌می‌کنم، آب را در دیگ می‌ریزم و آنرا روی اجاق می‌گذارم». ـ «بسیار خوب حالاکمی صورت مساله را تغییرمی‌دهیم. همه چیز مثل سابق، جزاینکه آب در دیگ وجود دارد. در این حالت چه باید بکنید؟» شنونده با اطمینان بیشتری پاسخ می‌دهد: «آتش را روشن می‌کنم ودیگ‌را روی آن می‌گذارم».

ولی،اگرچه‌غیرمنتظره‌است،می‌توان گفت: «درست‌است، فیزیکدان به همین ترتیب عمل می‌کند! ولی، ریاضیدان، آب را از دیگ بیرون می‌ریزد ومی‌گوید که در اینصورت، به‌همان مسألهٔ قبل می‌رسیم».

بخصوص، همین روش رسیدن به آنچه که از قبل می‌دانیم، پایهٔ حل معادلهٔ درجهٔ دوم است، نه فرمولی که در دبیرستانها از آن استفاده می‌کنند وهر دانش آموزی چنان آنرا در ذهن خود فروکرده است که حتی سالها بعداز پایان دورهٔ دبیرستانی، در خواب هم مثل صدای طبل در مغز او صدا می‌کند.

به نظر می‌رسدکه باز هم ممکن است دراینجا دشواری پیش‌آید. فرض‌کنید،بتوانیم سمت چپ‌تساوی را به‌صورت مجذورکامل‌درآوریم. ولی هیچ عددی وجود نداشته باشدکه مجذورآن مساوی عددی باشدکه



در سمت راست تساوی قرار گرفته است، مثلاً

$$(x+۳)^{۲}=۲$$

در واقع ، اگر به جای x ، عدد بگذاریم، هرگز به نتیجه‌ای که در سمت راست تساوی است، نمی‌رسیم. باوجود این بسیارپیش می‌آید که درعمل به چنین معادله‌هایی می‌رسیم. دراینجا، مسأله‌ای در برابرما قرار می‌گیرد، که مربوط به عمل توان است: درجستجوی عددی هستیم که توان دوم آن مساوی ۲ باشد. واین همان مسألهٔ ریشه گرفتن است که ما درقسمتهای بعد، به‌عنوان یکی ازعملهای عکس توان، به آن‌خواهیم پرداخت. (درهمانجا به‌پرسش مربوط به تعدادجوابهای معادلهٔ درجه دوم هم پاسخ خواهیم داد، تا آن زمان، تنها به این مطالب دلخوشیم که

می‌توانیم جوابی را جستجو کنیم.) برای آرامش خواننده، تنها این‌را می‌گوییم که ما به حل این مسأله موفق خواهیم شد.

اگر خواننده، خود را در قیدوبند فرمولهاگیر نینداخته باشد و به ماهیت عملها توجه می‌کند، می‌تواند بـدون هیچ زحمتی، بسیاری از معادله‌های درجه‌های بالاتر را حل‌کند. مثلاً، فرض‌کنید، این معادله را به ما داده باشند:

$$(x+۱)^۳ = ۲۷$$

چون ۳ × ۳ × ۳ = ۲۷، یعنی $۳^۳$ است، بنابرایـن ۳، همان عددی است که مکعب آن برابر است با ۲۷ وبنابراین

$$x+۱ = ۳$$

واز آنجا به سادگی جواب معادلهٔ ما بدست می‌آید:

$$x = ۲$$

عبارت $(x+۱)^۳$ را هم براساس رابطهٔ دوجمله‌ای، بازکنیم. با بازکردن $(x+۱)^۳$ این گمان پیش می‌آید که با تکیه بـرآن، می‌توان هرعبارتی از نوع آنرا به مکعب یك‌دو جمله‌ای تبدیل کـرد. ولی، هـر معادلهٔ درجه سومی را نمی‌توان به‌جایی رسانید که سمت چپ آن یـك مکعب‌کامل باشد. با وجود این، برای‌معادله‌های درجهٔسوم وچهارم،راه حلهای کلی وجوددارد.

ضمناً، علاوه برچهار عمل اصلی وجذرگرفتن، باید ریشهٔ سوم و ریشهٔ چهارم را هم پیدا کنیم، یعنی باید در جستجوی عددی باشیم کـه مکعب یا توان چهارم آن مساوی عدد مفروضی، ومثلاً ۲، باشد.

شاخه‌ای از ریاضیات که کارش، حل معادله‌هاست، جبر نامیده می‌شود. در دبیرستان، جبر، به همهٔ آنچیزی گفته می‌شود که به هندسه بستگی نداشته باشد. ولی، این یك حقیقت است کـه در همهٔ شاخه‌های ریاضیات، وحتی در هندسه، درهرگام‌به‌معادله برخورد می‌کنیم. به‌همین مناسبت، برای دانش‌آموزان این گمان پیش می‌آید که ریاضیات،چیزی جز دانش معادله‌ها، نیست واحتمالاً ریاضیات عالی هم دانشی است‌که به‌بررسی معادله‌های پیچیده‌تر می‌پردازد. درواقـع، دوره‌ای وجودداشت که درآن، همهٔ توجه ریاضیدانها، متوجه جبر بود. پیشرفت ریـاضیات در این رشته، به این معنا گرفته می‌شد، کـه با تکیه برمعادله‌های درجهٔ سوم ودرجهٔ چهارم، بتوانند روشهای کلی حل معادلهٔ درجهٔ پنجم، وبه طورکلی، معادلهٔ با درجهٔ دلخواه را پیدا کنند.

قابل حل نبودن معادلهٔ درجهٔ پنجم

می‌توانید پیش خود مجسم‌کنید که این خبر چه هیجانی به‌وجود آورد، که آبل ریاضیدان، شرطی را پیداکرده است که درصورت وجود آن برای یك معادله می‌توان روش‌کلی حل معادله را به کمك چهارعمل اصلی حساب وریشه گرفتن، پیدا کرد، وسپس معلوم شد کـه این شرط تنها در معادله‌های درجهٔ اول، دوم، سوم وچهارم، صدق می‌کنند. به‌این ترتیب‌آرزوی پیداکردن روش‌کلی حل معادلهٔ درجهٔ پنجم،بر باد رفت. به نظر می‌رسید که جبردانها، باید بـه موقع حرفهٔ خود را تغییر دهند.

وما در اینجا به یکی از شاعرانه‌ترین پیش‌آمدهای غم‌انگیزتاریخ ریاضیات می‌رسیم. یك فرانسوی بیست ساله به نام گالوا بـه خاطر یك دختردرگیر یك دوئل‌شدودراین دوئل‌کشته‌شد. گالوا ، درآستانهٔ مرگ، نامه‌ای‌به‌دوستش‌نوشت ودراین«وصیت‌نامه»اندیشه‌های خودرادربارهٔجبر

بیان‌کرد و به این شاخهٔ ریاضیات، که بدون تکیه‌گاه بـه نظرمی‌رسید، شکفتگی تازه‌ای بخشید.

باوجودی‌که،برای‌حل معادلهٔ درجهٔ پنجم، روش‌کلی وجودندارد، بعضی از حالتهای آنرا می‌توان حل‌کرد. مثلا، معادلهٔ

$$x^{5}=32$$

ویا معادلهٔ

$$(x+1)^{5}=32$$

که با حل معادلهٔاول به جواب $x=2$ وبا حل معادلهٔ دوم به $x+1=2$ واز آنجا به جواب $x=1$ می‌رسیم. معادله‌هایی‌که به صورتهای دیـگر هم باشند، ممکن است حل شوند . یـکی از نمونه‌های ممکن را در نظر می‌گیریم. روشن است که جواب معادلهٔ

$$x^{5}+2x^{4}+x=0$$

عبارتست از $x=0$، زیرا هرتوانی ازصفر برابر استباصفر وحاصلضرب صفردرهرعددی‌برابرصفرمی‌شود،به‌این‌ترتیب،حاصل $0^{5}+2\times 0^{4}+0$ برابر صفر خواهد شد.

به‌همین مناسبت است که پهنهٔ تازه‌ای‌در برابر بـررسیهای‌جبری گسترده می‌شود؛ اگر چه نمی‌توانیم در بارهٔ روش‌کلی حل گفتگوکنیم ولی می‌توانیم این مسالهٔ بسیار جالب را بررسی کنیم: کدام معادله‌ای از درجه‌های بالا را می‌توان به‌کمک‌عملهای یاد شده حل‌کرد؟وصیت‌نامهٔ گالوا، روش حل این مسأله را به ما می‌دهد.

نظریهٔ گالوا

روش گالوا، بیش از اندازه، سودمند افتاد. به‌ویژه، جبر کـه در

خطر سقوط بود، به‌کمك این روش، توانست شکوه وجلال‌پیشین خودرا بدست آورد، نیروی درونی ریاضیات، زخم را در همانجایی‌که پیداشده بود، شفابخشید. شاخهٔ تازهٔ جبر، خاطرهٔ گالوا را گرامی داشت و به نام او، نظریهٔ‌گالوا نامیده شد.

واین چیزی است که من می‌خواهم توجه خواننده را به طرف‌آن جلب کنم. در جبر بیش از همه بـه این موضوع برخورد می‌کنیم کـه ریاضیات، با به کار بـردن روشهای خاص خود، همیشه از جلد محدود خود بیرون می‌آیدو قلمرو خود را گسترش می‌دهد. وما بارها وبارها با این حقیقت مواجه می شویم.

۲.
قالب سازنده

۹. عدد راه فرارمی‌خواهد

ما تا اینجا توانسته‌ایم خیلی چیزها را فرا بگیریم. همهٔ آنها، کم و بیش، به عمل عکس می‌رسند، واکنون، زمان آن رسیده است که عمل عکس را مورد بررسی قراردهیم.

تفریق، هنوز بی‌آزار ومعصوم به نظر می‌رسد. درتفریق، سخن‌از چه عملی است؟ عکس عمل جمع را، به این ترتیب می‌توان فهمید: من مجموع دو جمله را می دانم، مثلا ۱۰؛ یکی از جمله‌ها هم برای من معلوم است، مثلاً ۶. جملهٔ دوم چیست؟ روشن است که گفتگو برسر ۴ است، زیرا، اگرازه۱، جملهٔ معلوم ۶ راکم کنیم، همین عدد ۴بدست می‌آید. چه دشواری در زیر این عمل پنهان است؟

عددهای منفی

دشواری از اینجاشروع می‌شودکه پیش از آنکه عددهای ۱۰و۶، به عنوان مثال، داده شود، کمی در بارهٔ آن فکر کنیم. در مورد جمع، می‌توان دو «موضع» از دنبالهٔ عددهای طبیعی را، انتخاب کرد. تردیدی نیست که این دوعدد را هرجور انتخاب کنیم وبه هرترتیبی بنویسیم، می‌توانیم آنها را جمع کنیم.

ولی فرض کنید که مسأله‌ای به‌این صورت داشته باشیم: مجموع دو عدد مساوی ۶ شده است، یکی از دو عدد برابر است با۱۰، عدد دوم

چند است؟

بلافاصله دیده می‌شود که‌نمی‌توان پاسخ این پرسش را پیداکرد. مجموع نمی‌تواند کوچکتر از یکی از جمله‌های جمع باشد، و به همین مناسبت، همیشه‌باید توجه داشتة باشیم‌که مفروق از مفروق‌منه کوچکتر است.

ولی آیا همهٔ مطلب همین است؟

ممکن است، خواننده دچارحیرت شود که چرا دربارهٔ مطلبی به این پوچی، اینهمه‌گفتگو می‌کنیم. هیچکس نمی‌تواند، حتی تصوراینرا داشته باشد که می‌توان از چیزی، بیش از آنچه که در ابتدا بوده است برداشت کرد، وهمه تفریقهای «عادی» را هم می‌توان به‌سادگی و بدون هیچ زحمتی، انجام داد.

البته، این مطلب درست‌است.ولی، باهمهٔ اینهاحالتهایی پیش‌می آید که مسأله به ما تحمیل می‌کند که عدد بزرگتر را، از عدد کوچکتر کم کنیم.

معادله‌ای به یاد بیاوریم که به یاری آن می‌شد به این پرسش، پاسخ داد: بعد از چند سال، سن پدر، دوبرابر سن پسر می‌شود.؟

این مسأله را، برای حالتی در نظر می‌گیریم که پدر ۵۲ سال و پسر ۲۷ سال داشته باشد. در این مورد هم، کاملاً شبیه قبل، استدلال می‌کنیم: فرض می‌کنیم که این پیش آمد، بعد از x سال پیدا شود. در آن زمان، پدر x + ۵۲ سال و پسر x+۲۷ سال خواهد داشت؛ ضمناً باید داشته باشیم:

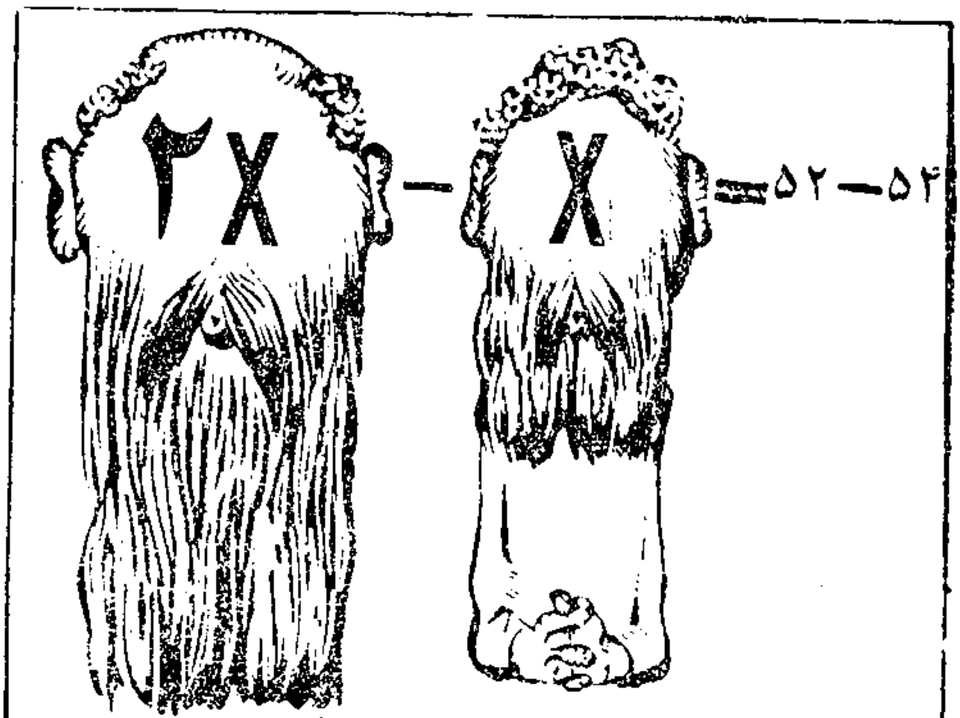
$$۵۲+x=۲\ (۲۷+x)$$

در سمت راست تساوی، هردو جملهٔ داخل‌پرانتزرا در ۲ ضرب می‌کنیم،

$$۵۲ + x = ۵۴ + ۲x$$

از قاعده‌ای که می‌دانیم، استفاده می‌کنیم: x را به سمت راست تساوی می آوریم و ۵۴ رابه سمت چپ منتقل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$۵۲ - ۵۴ = ۲x - x$$



اینجاست‌که گرفتار می‌شویم: به عددی نیاز داریم کـه برابر باحاصل تفرین ۵۴ـــ۵۲ باشد، در حالیکه، این تفریق رانمی‌توانیم انجام دهیم!

می‌بینید که خود به خود به ایـن سمت کشیده شدیم کـه مقدار مجهول برابر است با تفاضل ۵۴ــ۵۲ ، بنابراین باید در تنظیم صورت مسأله، اشتباهی شده باشد: سن این پـدر، هرگـز درآینده، دوبرابر سن

پسر نخواهد شد.

روی عددهایی که به عنوان سن پدروپسرشده است (یعنی۵۲و۲۷) بیشتر دقت کنیم. خیلی زود می‌توان فهمید که دو سال قبل، پدر ۵۰ سال وپسر ۲۵ سال داشته‌است: ودرآن زمان، سن پدر، دو برابر سن‌پسر بوده است.

به این ترتیب، تنها باید جزئی تغییری در صورت مسألهٔ بدهیم: چند سال قبل، سن پدر، دو برابر سن پسر، بوده است؟

حالا دیگر، حل مسأله، هیچ زحمتی ندارد . x سال قبل، پدر x — ۵۲ وپسر x — ۲۷ سال داشته است وباید داشته باشیم:

$$۵۲ - x = ۲\ (۲۷ - x)$$

تفاضل سمت راست تساوی باید در ۲ ضرب شود، ۲۷ و x را به‌طور جداگانه در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۵۲ - x = ۵۴ - ۲x$$

(وقتی که شما می‌خواهید، حاصلضرب ۹۹ × ۲ راپیدا کنید، می‌توانید ۲ را در ۱۰۰ ضرب کنید وسپس، از حاصلضرب، ۲ واحد کم‌کنید. در این صورت، شما عدد ۹۹ را ۱ — ۱۰۰ نوشته اید و برای اینکه‌دوبرابر آنرا بدست آورید تفاضل ۱ × ۲ — ۱۰۰ × ۲ را پیدا کرده‌اید).

حالا، ۲x را به عنوان یك عامل جمع، به سمت چپ و ۵۲ رابه عنوان مفروق به سمت راست منتقل می‌کنیم:

$$۲x - x = ۵۴ - ۵۲$$

که هم تفریق سمت چپ وهم تفریق سمت راست را می‌توان به راحتی

انجام داد:

$$x = ۲$$

و به این ترتیب، به همان نتیجه‌ای که انتظار داشتیم، می‌رسیم.

باوجود این، روشی را که انتخاب کردیم، تا حدی طولانی بود. در مسیری جلو می‌رفتیم و به‌محض‌اینکه به مشکل کوچکی برخوردیم، تمام راه را برگشتیم وصورت مسأله را مورد تحلیل قرار دادیم و بعداز تغییری که در آن دادیم، دوباره به راه خود قدم‌گذاشتیم. درحالیکه، می‌توانستیم در همان جائی که به مشکل برخوردکردیم، راه خود را ادامه دهیم . به‌جایی برگردیم که گمان کردیم دیگر نمی‌توانیم راه را ادامه دهیم.

تفاضل

۵۲ — ۵۴

خیلی روشن فریاد می‌زند که : « این تفاضلی که می‌بینید برابر است با ۲ ، منتهی این دو سال را باید درجهت مخالف جستجو کرد: در گذشته و نه درآینده. چرا نمی خواهید این مطلب ساده‌مربوط به مرا بفهمید؟ »

به این ترتیب، همه چیز روشن می‌شود: تفاضل ۵۴ــ۵۲ را باید شبیه تفاضل ۵۲ ــ ۵۴، حساب کرد، تنها در تفاضل اول، جهت معینی، مخالف جهت عادی، وجود دارد. این جهت، به‌سمت گذشته می‌رود و نشان می‌دهد که باید ۲ سال از سن کنونی پدر وپسر، کم کرد؛ به‌همین مناسبت هم ما آنرا با علامت تفریق، مشخص می‌کنیم. به این ترتیب:

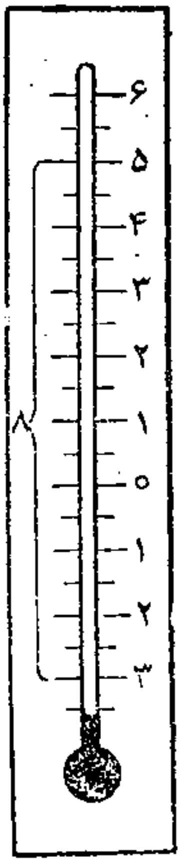
$$۵۲ - ۵۴ = - ۲$$

بنابراین، به همهٔ عددهایی هم که تاکنون باآنها سروکار داشته‌ایم، باید علامت «+» را داد، یعنی، اگر جواب مسألهٔ ما اینطور بود: «بعد ازدو سال»، باید به سن کنونی آنها، ۲ سال را اضافه کرد. واگربخواهیم روی این خصوصیت آن تأکید کنیم، علامت «+» را به‌آن اضافه می‌کنیم.

این نمونه، تنها موردی نیست که برای‌آن، ناچارشدیم، عدد را با جهت مشخصی بررسی کنیم. مثلاً، وقتی که در زمستان بگوییم، گرماسنج، درجهٔ ۴ را نشان می‌دهد، آگاهی درستی دربارهٔ درجهٔ گرمای هوا پیدانمی‌کنیم. باید اینرا هم اضافه کنیم که آیا گفتگو از ۴ درجه بالای صفر است یا زیر صفر. برای آنهایی که از سرما گریزانند، این اختلاف، اهمیت زیادی دارد.

همینطور، وقتی که می‌گوییم: سدهٔ سوم، همین بی‌دقتی وجود دارد، زیرا معلوم نمی‌کند که آیا گفتگو از سدهٔ سوم بعد از میلاد است یا سدهٔ سوم پیش از میلاد. یا وقتی که از ۱۵ درجه طول جغرافیایی گفتگو می‌کنیم، باید روشن کنیم که این ۱۵ درجه در شرق نصف‌النهار صفر قرار دارد یا درغرب آن. همچنین، حسابدار باید بخوبی بداند که مبلغ ۱۰۰۰ ریال را در ستون بدهکار بنویسد یا بستانکار.

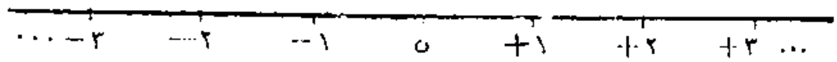
در همهٔ این موارد، می‌توان مقادیری را که در جهت مخالف قراردارند، باعلامتهای «+» و «−» مشخص کرد وآنها رابانامهای مختلف بیان کرد. مقادیری که‌علامت «+» را باخوددارند، مثبت ومقادیری که‌علامت «−» را باخود دارند منفی می‌نامیم. هرعدد منفی را، می‌توان به‌عنوان نتیجهٔ تفریقی دانست که درآن، عدد مثبتی را، از عدد مثبت



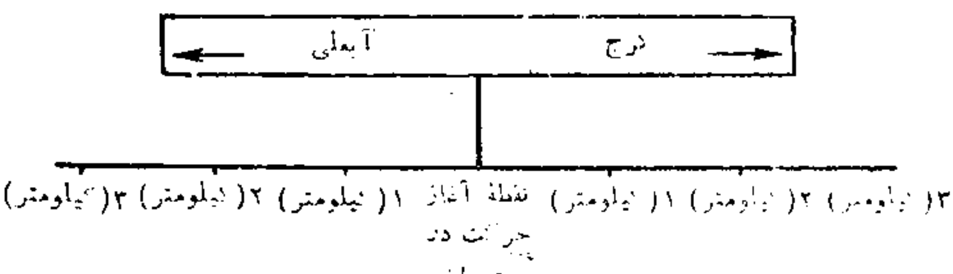
کوچکتر از خود، کم کرده‌ایم.

مثلاً، اگر گرماسنج، درجهٔ ۵ رانشان دهد، وبعد، ۸ درجه سقوط کند، درجهٔ حرارت حاصل را بـه‌کمك تفریق، پیدا خواهیم کرد. هیچ چیز، مانع این نمی‌شود که مادرجهٔ حرارت را از ۵ درجه، بـهٔ اندازهٔ ۸ درجه پـایین بیاوریم: برای این منظور باید از مرز صفر درجه، پایین‌تر برویم‌وبه ۳ درجه زیرصفر برسیم، یعنی به ۳ـ درجه: ۳ — = ۸ — ۵.

چنین تفریقی، همیشه ما را از صفر ، به طرف مقابل می‌برد. به‌این ترتیب، اگربخواهیم مقادیر را روی خط‌عددی نشان دهیم، باید مقادیرمثبت را دریکجهت (ومعمولا طرف راست) ومقادیرمنفی‌را درجهت مخالف‌آن، قرار دهیم:



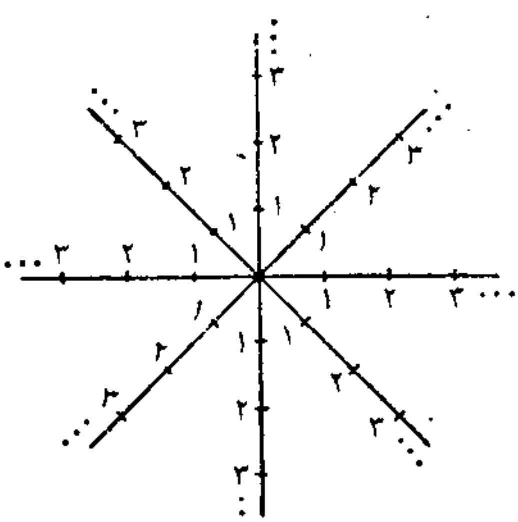
همین خط عددی راهم، می‌توان به عنوان نمونه‌ای از مقادیر بـا جهتهای مختلف در نظر گرفت، تنها باید آنرا جاده‌ای در نظر گـرفت که جای مشخصی از آنرا، به عنوان نقطهٔ صفر، انتخاب کرده باشیم.



حالتهایی هم وجود دارد که تنها به مقدار مطلق عدد، ونه به‌جهت آن، نیاز داریم، مثل موقعی که بخواهیم فاصلهٔ بین دونقطه را بیان کنیم. مثلاً می‌گوییم: طول مارسه متر است، بدون هیچ علامتی؛ وبدون تردید هیچکس دچار این اشتباه نمی شودکه حکم کند: طول مارازسرتا دم برابر ۳ متر واز دم تا سر برابر ۳ متر، بنابراین رویهم، برابر ۶ متر می‌شود.

تضادوتقابل، ازویژگیهای درونی طبیعت است وبه‌همین مناسبت در تفکر آدمی هم وجود دارد: همانطور که وقتی از روشنایی صحبت می‌کنیم، باید تاریکی را هم‌بپذیریم، باید انتظارداشته باشیم که دربرابر عددهای مثبت، عددهای منفی هم وجود دارد.

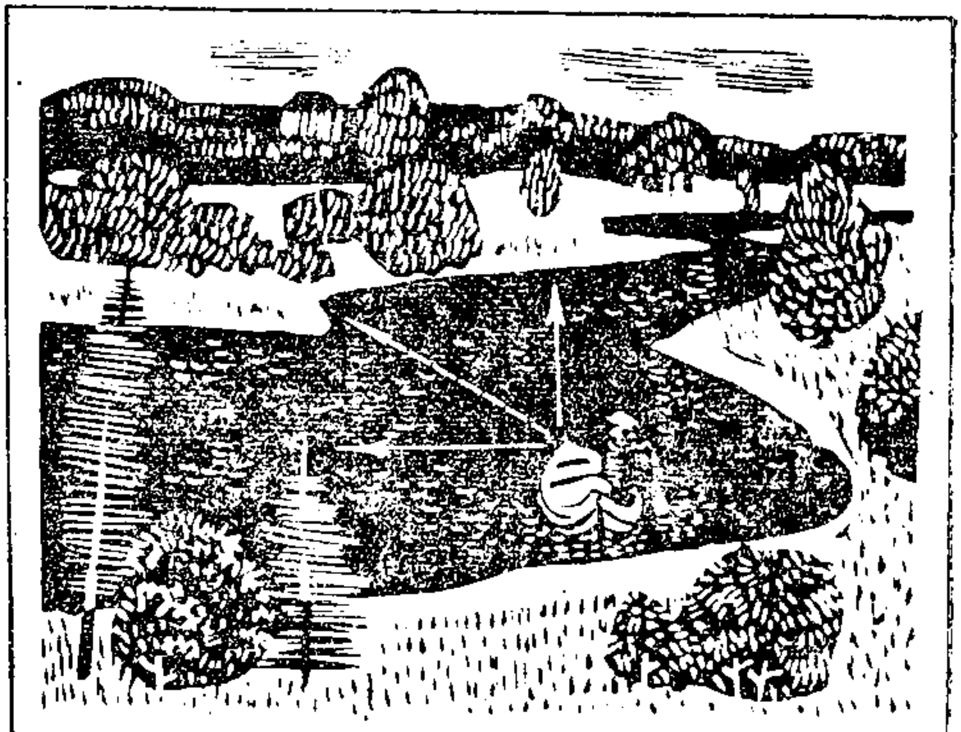
ولی، روشن‌است که‌همیشه‌این‌تباین‌دقیق‌وجودندارد: بین روشنایی وتاریکی، مرحله‌های بسیار زیادی وجوددارد. از یك نقطه، تنها به دو طرف، نمی‌توان حرکت‌کرد، مسیرهای دیگری هم، به جز این دوجهت، وجود دارد. از تهران، می‌توان به طرف هر شهری از دنیا، حرکت کرد. به این ترتیب، باید بحث خود را «تکمیل» کنیم و نیم خطهای دیگری



را هم که از نقطهٔ صفر آغاز شده‌اند (و همیشه متقابل یکدیگر نیستند)و می‌توان روی آنها، عددهای‌طبیعی رانشان داد، مورد بررسی قراردهیم.

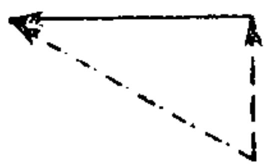
بردارها

این، یك تصور سادهٔ ذهن نیست. مقادیری‌که درجهتهای‌دلخواه باشند، یعنی بردارها، در فیزیك نقش اساسی دارند: حرکت می‌تواند درجهتهای مختلف انجام‌شود،نیرو می‌تواندرجهتهای‌مختلف، عمل‌کند مثلاً، وقتی دونیرو، به‌طور همزمان واردعمل‌بشودوشمابخواهید نتیجهٔ عمل این دو نیرو را بدانید، محاسبهٔ روی اینگونه مقادیر جهت دار، دارای معنا ومفهوم مشخصی‌می‌شود. هر قایق‌رانی می‌داند که‌وقتی می‌خواهد از عرض رودخانه‌ای بگذرد، درست در نقطهٔ متقابل جایی‌که

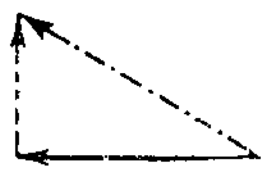


حرکت کرده است، به‌طرف دیگررودخانه‌نمی‌رسد، زیرا، علاوه‌برنیرویی که به وسیلهٔ پارو زدن به قایق وارد می‌آید، نیروی جریان‌آب هم‌بر آن اثر می‌گذارد و در نتیجه در نقطه‌ای دورتر، در جهت جریان آب، به ساحل دیگر می‌رسد.

درآب ساکن، قایق درجهتی که‌با خط چین نشان داده شده است، حرکت می‌کند، وسپس وقتی که آب جریان داشته باشد، قایق بدون پارو در همان زمان درجهت جریان آب و روی خط کامل، حرکت می‌کند. حالا اگر هر دوعامل باهم اثرکند ـ هم نیروی پاروزن وهم نیروی جریان‌آب قایق روی «خط ونقطه» حرکت می‌کند ودرست به همان نقطه‌ای می‌رسد که در حالت قبل ابتدا روی خط چین و سپس روی خط کامل، حرکت کرده بود:



تغییر توالی دوحرکت، به‌یك نتیجه می‌رسد

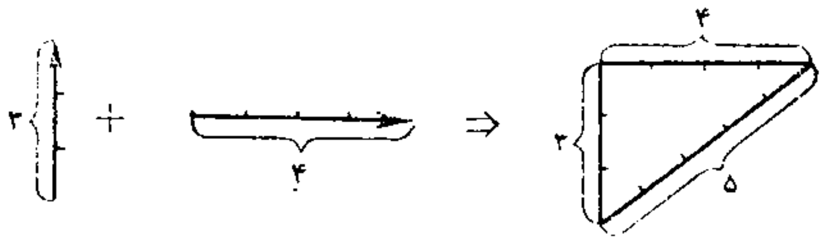


توالی دونوع حرکت قایق را به هرترتیبی بگیریم، نتیجه یکی خواهد بود ودر هر دوصورت، قایق به یك نقطه می‌رسد. بنابراین، در این نوع جمع کردن هم‌می‌توان جای جمله‌های جمع را باهم عوض کرد.

بعد از این، جمع بردارها را هم می‌توان به عنوان نوعی محاسبه در نظرگرفت. واحدهای جملهٔ اول را درجهت ↑ می‌گیریم وسپس، به آن واحدهای جملهٔ دوم را درجهت ← ، اضافه می‌کنیم ومی‌بینیم که چه برداری به این نقطهٔ پیدا شده ، رسیده است. این بردار، نتیجهٔ همهٔ عملهای ما، ویا آنطور که می‌گویند، مجموع دو بردار است.

ولی، این‌یك‌جمع خاص است. اگردوبردار، باجهتهایی که‌درشکل

می‌بینید، یکی رابه‌طول ۳ واحد و دیگری به‌طول ۴ واحدانتخاب کنیم، بردار مجموع، طولی برابر ۵ واحد پیدا می‌کند. دربرخورد اول، ممکن



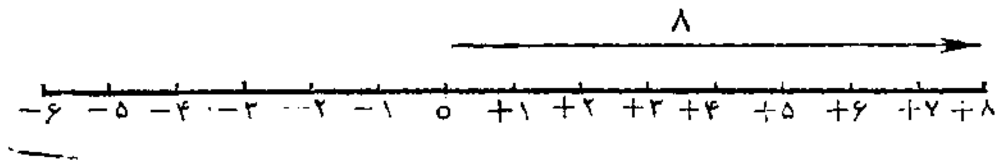
است به نظر برسد که ما به یك نتیجهٔ بی معنی رسیده‌ایم:

$$۳+۴=۵$$

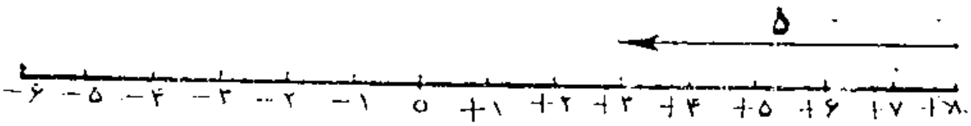
ولی، هیچکس بـه ما حق نمی دهـد کـه مطلب را اینطور مبهم و با بی دقتی، بیان کنیم؛ بایـد دقیقاً روشن کنیم کـه این عددهای ۳،۴و۵، هرکدام چه جهتی دارند؛ در چنین صورتی، دیـگر دچار سرگردانی نمی شویم وگمان نمی‌کنیم کـه مجموع دوعدد ۳ و ۴ ، از ۷ کوچکتر شده است. مجموع نیروهایی‌که در دوجهت مخالف باشند، حتی ممکن‌است برابر با صفر شود: داستان قدیمی دربارهٔ چندابله وجوددارد کـه‌تصمیم گرفتند به درشکه‌ای کـه چهار اسب داشت ، چهاراسب دیـگر ببندند، ولی هرچه کوشش کردتد، درشکه ازجای خود تکان نخورد؛ دلیلش هم این بود که چهار اسب تازه را درطرف دیگر درشکه ودرجهت مخالف چهار اسب اول، بسته بودند.

ما بیش از این، دربارهٔ عددهایی، که جهتهای گوناگون دارند، گفتگو نـمی‌کنیم و تنها روی حالتی کـه دوجهت مخالـف هم را نشان می‌دهند، می‌ایستیم.

پیش از این، دربارهٔ اینکه چگونه می‌توان‌عددهای مثبت‌ومنفی‌را روی محور عددها، جمع و یا تفریق کرد، سخن گفته‌ایم. مثلاً، اگر بخواهیم ۵ − را به ۸ + اضافه کنیم، ابتدا از نقطهٔ ۰، به طرف راست ۸ واحد، جدا می‌کنیم:



سپس از نقطه‌ای که بدست می‌آید، ۵ واحد به طرف چپ جدا می‌کنیم:

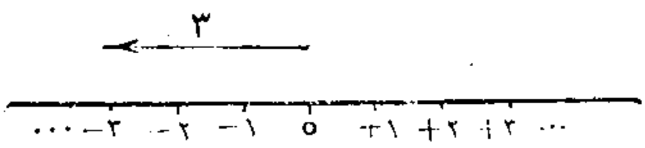


بلافاصله، ۳ + رابدست می‌آوریم. بنابراین، مجموع ۸ + و۵ − برابر است با ۳ +. به خاطر داشته باشیم که

$$۸+(-۵)=۳=۸-۵$$

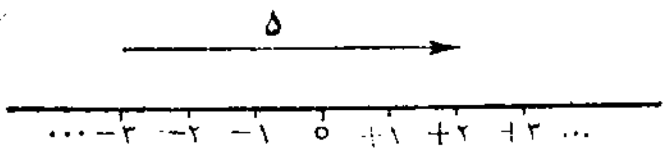
بنابراین، می‌توان به‌جای اضافه‌کردن یك عدد منفی،عمل معمولی‌تفریق را انجام داد.

تفریق را هم می‌توان روی محور عددها، بدون هیچ زحمتی‌انجام داد، به شرطی که بـه یاد بیاوریم که‌عمل تفریق، عکس‌عمل‌جمع‌است. مثلاً ۳ − را از ۲ + کم می‌کنیم. این، به معنای آنست کـه مجموع دوعدد برابر ۲ + ویکی از جمله‌های جمع برابر ۳ ــ است وباید جملهٔ دوم جمع راجستجو کنیم. جمع از اینجا آغاز می‌شود که از نقطهٔ ۰ به اندازهٔ ۳ واحد به طرف چپ برویم:



حالا، در برابر این پرسش قرارداریم: چه باید کرد تا نقطهٔ متناظر عدد ۲+ پیدا شود؟

برای اینکه از ۳− به ۲+ برسیم، باید ۵ واحد به سمت راست برویم:



و به این ترتیب، وقتی‌که ۳− را از ۲+ کم کنیم، به عدد ۵+ می‌رسیم. در اینجا هم اگر به عدد ۲+، عدد ۳+ را اضافه می‌کردیم، درست به همین‌نتیجه می‌رسیدیم. وهمیشه همینطور است. به‌جای‌اینکه‌تفریق کنیم همیشه می‌توان عمل جمع را انجام داد، منتهی جمع با عددی‌که علامت مخالف آنرا دارد.

حالا، اگر یك عدد منفی را چند بار با خودش جمع کنیم، مفهوم عمل ضرب برای ما روشن می‌شود. عدد ۲− را سه بار درنظر می‌گیریم، یعنی این جمع را انجام می‌دهیم:

$$(-۲)+(-۲)+(-۲)$$

از نقطهٔ متناظر با ۲−، دو واحد به طرف چپ می‌رویم، سپس دوباره دو واحد به طرف چپ، وبنابراین به عدد ۶− می‌رسیم:

$$(+۳)\times(-۲)=-۶$$

ولی، اگرعامل نخست ضرب، منفی باشد، چه بایدکرد؟ عدد را می‌توان

دوبار، سه بار، چهاربار باخودش جمع کرد، ولی وقتی که بگوییم عددی را «۲- بار» باخودش جمع کنیم، چه مفهومی دارد؟ ولی، ما دیگر تجربه پیداکرده‌ایم وبه سادگی به این استدلال گمراه کننده، تسلیم نمی‌شویم که: اگر چیزی مفهوم ندارد، باآن نمی‌شودعمل کرد. ما دربارهٔ عددهای منفی سخن گفتیم و دیدیم که لازم نیست آنها را جداگانه وبه عنوان حالت جدیدی مورد بررسی قراردهیم، بلکه با آنها هم باهمان روش عمل با عددهای مثبت، برخورد کردیم. در مورد عمل ضرب هم، وضع به همین‌گونه است. وقتی که به‌مسأله‌ای برخورد می‌کنیم که‌برای حل آن باید عمل ضرب را در حوزهٔ عددهای مثبت انجام داد، بیفایده‌و غیر منطقی‌است که‌حالتی را از آن جدا کنیم‌وبگوییم : درحالت‌عددهای مثبت، بایدعمل ضرب را انجام داد ودرحالت عددهای منفی، عملی‌دیگر. ببینیم این «چیز دیگری» که در اینجا واردگود شده است، چیست. این مفهوم تازه،عبارتست از ضرب عددهای منفی. در واقع، در این مورد کاملاً حق داریم. در اینجا هم می‌توان برای چیزی که در برخورد اول مفهومی ندارد، معنای جالبی پیدا کرد.

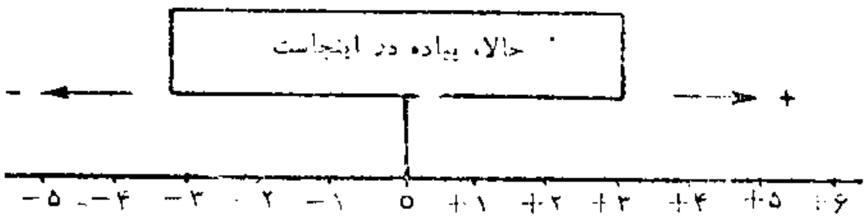
مثال، بهتر از پرحرفی، موضوع را روشن می‌کند.

یکنفر با سرعت ساعتی ۳ کیلومتر، گردش می‌کند، بدون اینکه سرعت خود را تغییردهد. بعداز دوساعت، چه راهی را رفته است؟روشن است که‌عمل ضرب، پاسخ را می‌دهد. او در هرساعت ۳ کیلومتر می‌رود، یعنی در۲ساعت‌۶ = ۲ × ۳ کیلومترمی‌رود. بنابراین،برای‌پیداکردن‌راهی که رفته است، زمان گردش را در سرعت پیاده روی، ضرب می‌کنیم.

حالا، پرسش رابه‌نحوی می‌دهیم که‌هم راه، هم‌زمان وهم سرعت، مقادیری جهت دار باشند. در راه، نقطه‌ای وجوددارد که ما آنرا«اینجا»

می‌نامیم؛ وقتی که گردش قهرمان مسألهٔما، به طرف راست ایـن نقطه انجام گیرد، آنرا مثبت ووقتی که به طرف چپ این نقطه باشد، آنـرا منفی به حساب می‌آوریم. اگر سرعت ۳ کیلـومتر در ساعت، درجهت راست باشد، می‌گوییم، پیاده با سرعت ۳+ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند، واگر جهت این سرعت به طرف چپ باشد، می‌گوییم پیاده بـا سرعت ۳ـ کیلومتر در ساعت پیش می‌رود. بالاخره، یك لحظهٔ زمانی را به عنوان «حالا»، برمی‌گزینیم و زمانی را که هنوز باید بیاید، مثبت و زمانی را که مربوط به گذشته است، منفی می‌گیریم.

نقطه‌ای را که پیاده ازآنجا حرکت را آغاز می‌کند، بااین‌جمله، تعریف می‌کنیم: «حالا، پیاده در اینجاست».



به دوحالتی که مورد توجه ماست، می‌پردازیم:

۱. سرعت پیاده، برابـر ۳کیلومتر در ساعت است؛ او حالا، در اینجاست. دوساعت قبل، کجا بوده است؟آنچه، راکه بدست‌می‌آوریم، باید نتیجهٔ این ضرب دانست:

$$(-۲)\times(+۳)$$

دقت‌کنیم. سرعت پیاده، مثبت است، بنابراین، او به‌طرف‌راست حرکت می‌کند. حالا، او در اینجاست (شکل را ببینید) . بنابرایـن، دو ساعت قبل، در سمت چپ اینجا بوده است؛ ضمناً، فاصلهٔ او تا اینجا ،

به‌اندازه‌ای‌بوده است که می‌تواند در ۲ ساعت طی کند، یعنی ۶=۳×۲ کیلومتر: در ۶کیلومتری سمت چپ اینجا، یعنی ۶ـ، وبنابراین،کشف می‌کنیم:

$$(-۲)\times(+۳)=-۶$$

به این‌ترتیب، اگریك عدد مثبت را دریك عدد منفی ضرب‌کنیم، عددی منفی بدست می‌آید.

۲. فرض‌کنید، سرعت ۳ـ‌کیلومتر درساعت باشد. حالا هم،مسافر به اینجا رسیده است. دو ساعت قبل، کجا بوده است؟ باید آنچه را که بدست می‌آید به‌عنوان حاصلضرب زیر، به حساب آورد:

$$(-۲)\times(-۳)$$

سرعت منفی، به معنای اینست که پیاده، به طرف چپ می‌رود؛ حالا، او در اینجاست (دو باره شکل را ببینید)، این وضع نشان می‌دهد که او دو ساعت قبل،درسمت راست، وبه فاصلهٔ ۶کیلومتری اینجابوده است: ۶کیلومتری‌سمت راست اینجا، یعنی ۶+. بنابراین،معلوم‌می‌شود

$$(-۲)\times(-۳)=+۶$$

به این ترتیب، حاصلضرب دوعدد منفی، برابر است با عددی مثبت.

درست، در حالتی هم که ما در بیان خود، دوبار از نفی استفاده می‌کنیم، بـه‌همین‌نتیجه می‌رسیم: وقتی کـه می‌گـوییم: «ایـن درست نیست که من بادقت‌گوش‌نداده‌ام»، مثل اینست که‌بگوییم: «من‌درواقع، بادقت گوش داده‌ام».

از قانون علامتها در ضرب، می‌توان بلافاصله، قانون علامتها را

در تقسیم هم نتیجه گرفت. مثلاً، تقسیم (۳-):(۶+) به‌معنای اینست که باید عددی را جستجو کنیم، که از ضرب‌آن در ۳-، عدد ۶+ بدست آید. و روشن است که این عدد ۲- است.

از همین جا، یعنی قانون علامتها در ضرب، می توانیم برای توان هم استفاده کنیم:

$$(-۲)^۴=\underline{(-۲).(-۲)}.\underline{(-۲).(-۲)}=$$

$$=(+۴).(+۴)=+۱۶،$$

$$(-۲)^۵=\underline{(-۲).(-۲)}.\underline{(-۲).(-۲)}.(-۲)=$$

$$=(+۴).(+۴).(-۲)=(+۱۶).(-۲)=-۳۲$$

وقتی‌که بتوانیم‌عاملهای منفی رابه‌گروههای دوتایی‌تقسیم‌کنیم حاصلضرب. مثبت می شود؛ بنابراین، نتیجه می‌گیریم که: **توان زوج یك عدد منفی، همیشه مثبت وتوان فرد یك عدد منفی،همیشه‌منفی است.**

ما،مفهوم ضرب را روی یك مثال بررسی کردیم وبعد نتیجه را، برای همهٔموارد، درست دانستیم. ممکن‌است،این‌پرسش‌پیش‌آید که: آیادر مثالهای دیگر،حالتهای دیگری، پیش‌نمی‌آید؟ ما،تنها وقتی ازنتیجه‌ها، مطمئن خواهیم‌شد که برایمان روشن‌شودکه این‌قاعده‌های تازه‌برای‌ضرب باهمهٔقاعده‌هایی‌که دربارهٔ ضرب عددهای طبیعی می‌دانیم، سازگارباشد. در اینصورت، می‌توانیم، بدون ترس ازبرخورد با تناقض، آنها را به کاربریم. ولی قاعده‌های تازه، باهمهٔ قانونهای مربوط به ضرب‌عددهای طبیعی سازگاراست؛ مثلاً این قانون‌که در ضرب می‌توان جای‌عاملهای ضرب را عوض کرد. ما، قبلاً دیدیم (ومی‌توانیم آنرا به‌کمك همان

مثال پیاده هم، بدست آوریم) که

$$(-۲)+(-۲)+(-۲)=-۶$$

یعنی

$$(+۳)\times(-۲)=-۶$$

از مثال مربوط به پیاده هم، بدست آوریم:

$$(-۲)\times(+۳)=-۶$$

وبنابراین

$$(+۳)\times(-۲)=(-۲)\times(+۳)$$

اصل پیوستگی

وقتی که به عددها و یا عملهای تازه‌ای می‌رسیم، همیشه بایدبا دقت تمام تحقیق کرد و کاملاً مطمئن شد که «وجود» آنها، وسیله‌ای برای‌نقض‌قانونهایی که ازقبل داشته‌ایم، نشود؛زیرا، درریاضیات،همیشه کشش به طرف بدست آوردن روشهای واحد است.این مراقبت، برای گسترش مفهومهای قدیمی را ، اصل پیوستگی (یا اصل مداومت)گویند.

دنبالهٔ عددهای طبیعی، مستقلاً، و بدون تأثیر عاملهای خارجی، به وجود آمد. حرکت درونی ریاضیات (همراه با نیازهای خارجی)، انسان را واداشت تا عددهای تازه‌ای راکشف کند. برای عددهای تازه، محدودیتی وجودداشت.برای اینکه بتوان آنها را تعریف کرد، چارچوب محکمی لازم بود، چارچوبی که به‌کمك قانونهای قبلی (که‌برای‌عددهای قدیمی وجود داشت)، محدود شده بود، وتمام‌کوشش بشر این بود که تا آنجا که ممکن بود، از این قانونها خارج نشود. این روش کار، جهت

آفریتشهای بعدی را، نشان می‌دهد: عددهای تازه را باید طوری‌تنظیم کرده که باشکل وقالبی‌که ازپیش‌آماده شده است، تناسب داشته باشد. به قول گوته ، حتی کلام هم چیزی جز اندیشهٔ شکل یافته، نیست.

۱۰. غلظت نامحدود

عمل باکرها

حتی، بچه‌های خیلی کوچك هم، به تقسیمهایی برخوردمی‌کنند، که نمی‌توان آنها را، در حوزهٔ عددهای طبیعی، انجام داد. دوبچه، می‌خواهندسیبی را بین‌خود تقسیم کنند. آنها، موافقت‌می‌کنندکه هیچکدام ازآنها، سیب درست رابرندارند وبعد ازکمی فکر، سیب را به دوقسمت مساوی، تقسیم می‌کنند:



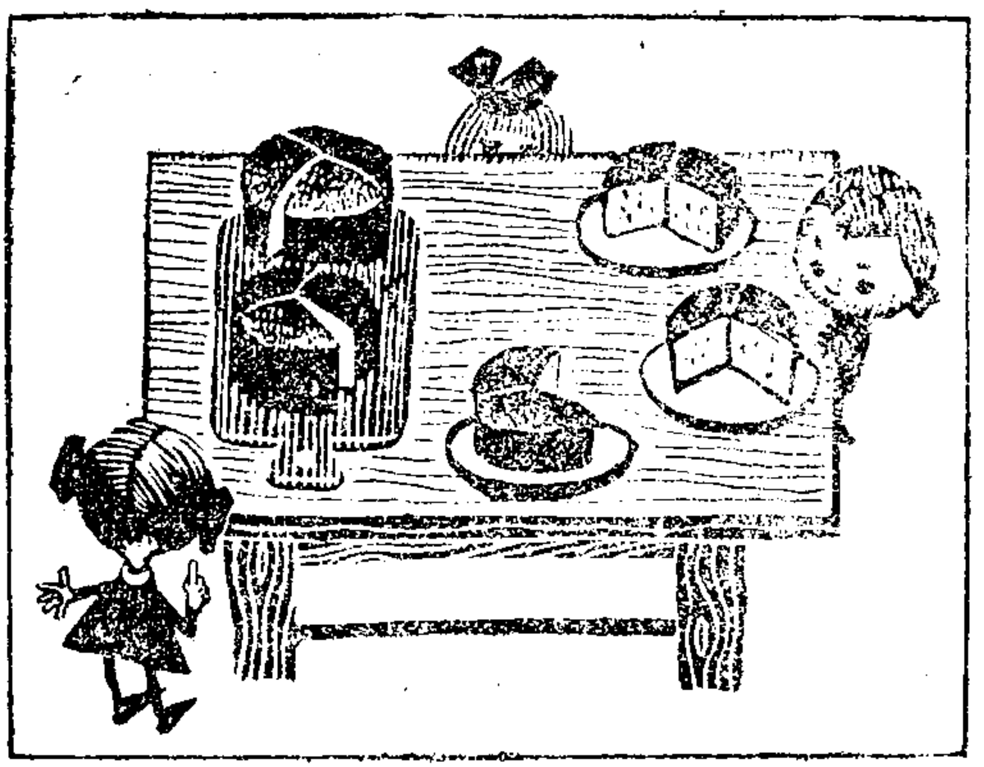
والبته، حتی به‌فکر آنها هم نمی‌گذرد که با این عمل خود، درواقع،

مفهوم «عدد» را گسترش داده‌اند.

تاکنون، به واحد، به عنوان چیزی‌که قابل بخش نیست، نگاه می‌کردیم. ولی، حالا، توانستیم آنرا نصف کنیم ومقداری کوچکتراز واحد، بدست آوریم. وقتی‌که این گام اولی را، بادلیری برداشتیم،می توانیم،بدون هیچ‌ترسی،واحد رابه ۳،به ۴،به ۵،... قسمت،تقسیم‌کنیم. سپس، می‌توانیم با این مقادیر کوچکتر از واحد، به محاسبه بپردازیم‌و مثلاً بگوییم: دونیمه، سه نیمه، چهارنیمه وغیره، ویا به زبان رقمها:

$$\frac{۲}{۲}, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۲}, \ldots$$

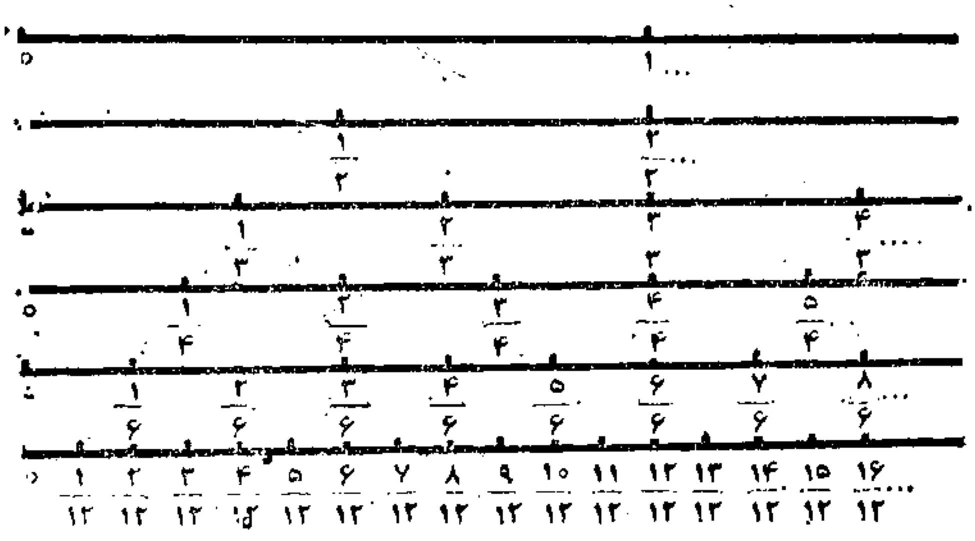
این نشانه‌گذاری ، هیچ تناقضی با این حقیقت ندارد که ما تا حالا، خط کسری را برای تقسیم به‌کار می‌بردیم. مثلا، اگر بخواهیم ۲ را بر ۳ تقسیم کنیم، ویااگرمشخص‌تر بگوییم، اگرسه بچه بخواهند دوشیرینی



را بین خود تقسیم کنند، بهتر اینست که ابتدا هرشیرینی را به ۳ قسمت برابر، تقسیم کنند؛ در اینصورت به هربچه دو سوم ، یعنی $\frac{۲}{۳}$ شیرینی می‌رسد.

عددی که زیر خط کسری نوشته شده است، نشان می‌دهد که واحد جدید چه اندازه است، به عبارت دیگر ، معلوم می‌کند که واحد اصلی به‌چند قسمت مساوی تقسیم‌شده است تا واحد جدید را درست کرده‌است؛ این مخرج کسر است. عدد روی خط کسری نشان می‌دهد که چند تا از این واحدهای جدید اختیار شده است؛ این صورت کسراست.

به‌این‌ترتیب، نقطه‌های روی خط عددی را، تا هرجا که بخواهیم، می‌توان زیاد کرد. می‌توان مرتباً، خطهای عددی تازه‌ای درست کرد که واحدهای آنها کوچکتر وکوچکتر باشد. اینها، چندتا از آنهاست:



بین مقادیری که روی خطهای مختلف قرار گرفته‌اند، مقادیر مساوی وجود دارد. کافی است ببینیم که کدام مقادیر ، درست زیر هم قرار گرفته‌اند. مثلاً

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۴}=\frac{۳}{۶}=\frac{۶}{۱۲} \text{ یا } \frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲}$$

و از اینجا می‌توان به سادگی فهمید، که چه تغییرهایی، مقدارکسر را تغییر نمی‌دهد. مثلاً $\frac{۴}{۶}$ با کسر ساده‌تر $\frac{۲}{۳}$ برابر است، یعنی $\frac{۴}{۶}$ رامی‌توان «ساده کرد» وبه شکل $\frac{۲}{۳}$ نوشت. برای این منظور، می‌توانیم صورت و مخرج کسر را با هم، به۲ تقسیم‌کنیم: ۲ = ۲ : ۴ ، ۳ = ۲ : ۶ وبنابراین $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}$. این موضوع، به‌خودی خودهم روشن است. هرکس، این مطلب را به سادگی می‌فهمد که یك سوم، دوبرابر یك ششم است وفرقی نمی کند که ما یك قطعهٔ بزرگتر را انتخاب کنیم (قطعهٔ یك سوم) یا دوقطعهٔ کوچکتر را (دوقطعهٔ یك ششم).

ماهمچنین می‌بینیم که مثلاً $\frac{۳}{۳}$ برابر است با یك واحد کامل ، و $\frac{۴}{۳}$برابر است با یك واحد و $\frac{۱}{۳}$ (که ما آنرا به شکل $۱\frac{۱}{۳}$ می‌نویسیم). اینها، در واقع، کسربه‌معنای خاص خود نیستند، زیرا «کسری ازواحد» را بیان نمی‌کنند (یامساوی واحد ویا بزرگترازآن‌هستند).

کاملاً روشن است‌که این مقادیر تازه را،که روی یك خطراست قرار دارند، می توان با استفاده از قاعده‌های عادی محاسبه، جمع ویا تفریق کرد. مثلاً، اگر به $\frac{۳}{۴}$ ، دوچهارم را اضافه کنیم، به$\frac{۵}{۴}$ می‌رسیم

$$\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

به همین ترتیب هم می‌توان در بارهٔ ضرب در عدد درست عمل کرد:

$$۲\times\frac{۵}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}+\frac{۵}{۱۲}$$

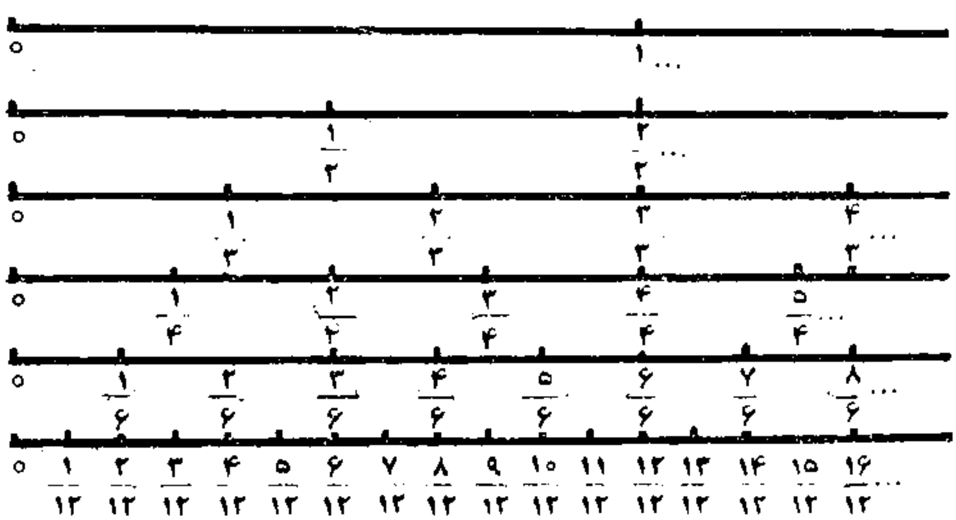
وروشن است که اگر از نقطهٔ $\frac{۵}{۱۲}$ روی خط عـددی، **۵ قسمت دیگـر**، از **قسمتهای یك دوازدهمی**، جلوبرویم، به $\frac{۱۵}{۱۲}$ می‌رسیم.

دشواری، زمانی پیش‌می‌آید که‌بخواهیم دوعددی را که مخرجهای نامساوی دارند، با هم جمع کنیم:

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}$$

در اینجا، می‌توان از این روش استفاده کرد: نزدیکترین خط راستی را پیدا می‌کنیم که‌روی‌آن، هم عددبرابر $\frac{۲}{۳}$ وهم عدد برابر $\frac{۳}{۴}$ ، وجودداشته باشد (به سادگی می‌توان تصورکرد که همیشه، چنین خطی وجوددارد). در مثال مـا، این خط همانست کـه در آن واحدهای یك دوازدهمی پیدا می‌شود. روی این خط، معلوم می‌شود که

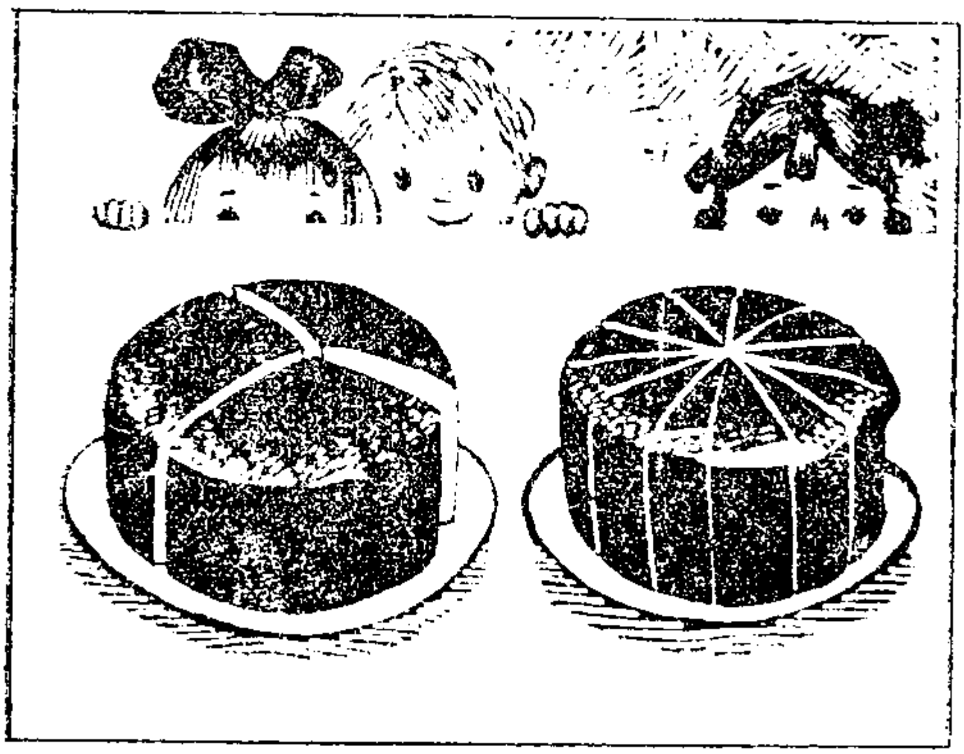
$$\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{۹}{۱۲}=\frac{۳}{۴}$$



و حالا دیگر به سادگی می تـوان عمل جمع را، روی یك خط عـددی ، انجام داد:

$$\frac{۸}{۱۲}+\frac{۹}{۱۲}$$

به همین ترتیب، در حالت تقسیم هم، باید به خط عددی دیگری منتقل شد[1]. توجه به این مطلب ساده است که نصف $\frac{۱}{۲}$، برابر است با $\frac{۱}{۴}$ وربع $\frac{۲}{۳}$ برابر است با $\frac{۲}{۱۲}$. هیچ چیز شگفت‌آوری دراینجا نیست، زیرا وقتی که مخرج را چهار برابر می‌کنیم، به این معناست که مقدار درست را بـه عددی تقسیم کرده‌ایم کـه چهار برابر حالت قبلی است و سپس ار آن به همان تعداد حالت قبلی انتخاب کرده‌ایم (چون صورت کسر را تغییر نداده‌ایم) بنابراین، باید مقداری که در این حالت بدست می‌آید، ربع مقدار حالت‌قبل باشد، مثلاً، درحالت تقسیم نان شیرینی:



۱. الکترونها،در انتشارالکترونی، از یك مدار به‌مدار دیگرمی‌جهند. ممکن است این مثال از فیزیك نظری، برای کسانی که با نظریهٔ اتمی‌آشنا هستند، بتواند تصورلازم را در مورد خطهای عددی،به‌وجود آورد.

به‌این ترتیب، می‌بینیم که هر کدام از عملهای یاد شده را روی کسر انجام دهیم، بازهم یك کسر بدست می‌آید (که‌ممکن است این کسر کوچکتر یا بزرگتر از واحد باشد).

برای ضرب کسرها، بازهم دشواری پیش می‌آید، زیرا جمع کردن یك عدد با خودش، به تعداد «چند نیمه مرتبه» هیچ مفهومی ندارد. یك دانش آموز کوچك می‌گفت: اگر در یك مرتبه، عدد ۳ بدست می‌آید در $\frac{۱}{۲}$ مرتبه، $۱\frac{۱}{۲}$ بدست خواهدآمد. در این بیان، فکری نهفته است. وقتی که می‌گوییم: شروین $\frac{۲}{۳}$ برابر برادرش می‌باشد. به معنای اینست که قد شروین برابر با $\frac{۲}{۳}$ قدبرادراوست. بنابراین، وقتی از $\frac{۲}{۳}$ برابر صحبت می‌کنیم، به معنای اینست که $\frac{۲}{۳}$ مقدار درست را در نظر می‌گیریم، نه تمام‌آنرا.

ما، عمل ضرب را درواقع، درمسأله‌ای ازاینگونه به‌کارمی‌بریم. اگر، آرد گندم، کیلویی ۵۰ ریال باشد، روشن است که ۴ کیلوگرم آن ۴×۵۰، یعنی ۲۰۰ ریال قیمت دارد. برای تعیین قیمت آرد، قیمت هر کیلو گرم آنرا، در تعداد کیلوگرمها، ضرب می‌کنیم.

حالا، صورت مسأله را کمی تغییر می‌دهیم. یك کیلوگرم آرد، ۵۰ ریال می‌ارزد، $\frac{۳}{۴}$ کیلوگرم آرد، چقدر قیمت دارد؟ جوابی که‌برای این مساله بدست می‌آید، همان جواب ضرب زیراست:

$$\frac{۳}{۴} \times ۵۰$$

روشن است که برای تعیین قیمت سه چهارم کیلوگرم آرد، می‌توان قیمت یك‌چهارم کیلوگرم را، سه برابر کرد. معلوم است که‌قیمت

$\frac{۱}{۴}$ کیلوگرم آرد، برابر است با یکچهارم ۵۰ریال (یعنی ۱۲/۵ ریال)

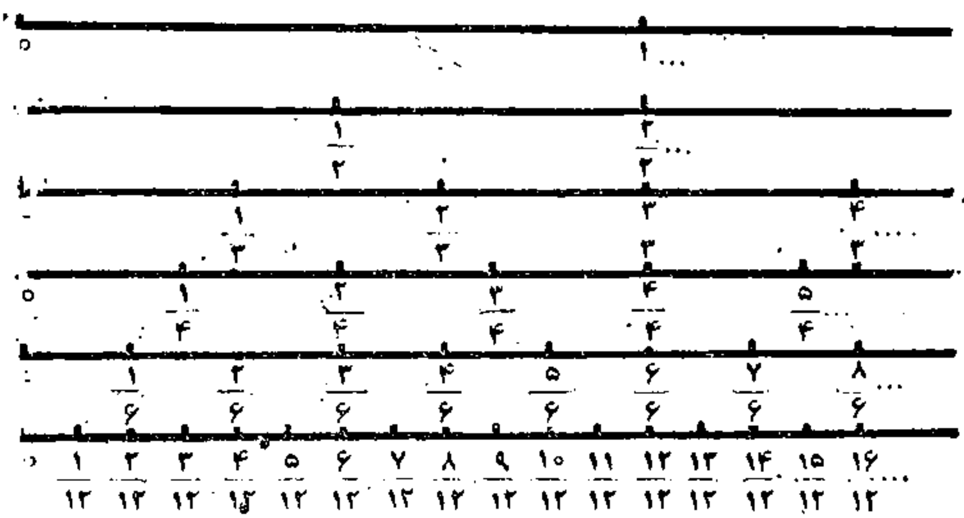
بنابراین، ضرب $۵۰ \times \frac{۳}{۴}$، به این معناست که باید ۵۰ را بر ۴ تقسیم و سپس خارج قسمت را در ۳ ضرب کنیم.

درست باهمین استدلال، می‌توان به‌این نتیجه رسید که‌برای‌تقسیم بر$\frac{۳}{۴}$، باید در ۴ ضرب و بر۳ تقسیم کرد. دراینصورت، ضرب و تقسیم هم، دوباره ما را به نتیجه‌ای می‌رساند که یك کسر است (روی یك خط عددی)، ومی‌توان ثابت کرد که با این گسترش مفهوم ضرب، هیچکدام از قانونهای مربوط به محاسبه، که قبلاً دربارهٔ آنها گفتگو کرده‌ایم، نقض نمی‌شود. تعجب نباید کرد کـه اغلب نتیجهٔ ضرب در یـك کسر، عددی کوچکتر از عدد اصلی می‌شود. وقتی که شما $\frac{۲}{۳}$ یك عدد رابدست می‌آورید، باید آن عدد را به سه قسمت بکنید و سپس دو قسمت آنـرا بردارید وروشن است که این نتیجه، کوچکتر از عدد اصلی است.

به‌سادگی‌می‌توان۲۰رادر$\frac{۱}{۴}$ ضرب کرد: باید به‌طور سادهٔ عدد ۲۰را به چهار قسمت مساوی،تقسیم و یك قسمت‌آنرا انتخاب کنیم‌وبنابراین نتیجهٔ ضرب برابر است با ۵. به همین ترتیب، ضرب در $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۵}$ هم انجام می‌گیرد، در این حالتها، بایـد از تمام عدد، نصف، ثلث و یا یك پنجم آنرا پیدا کرد. بنابراین، اگر بتوانیم کسرها را به «کسرهای ساده» با صورت واحد، تبدیل کنیم، کار ساده‌تر می‌شود، مثلاً

$$\frac{۵}{۱۲}=\frac{۴}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}$$

حالا به خطهای عددی متناظر با آنها مراجعه مـی‌کنیم؛ می‌بینیم کـه $\frac{۴}{۱۲}$، در واقع همان کسر $\frac{۱}{۳}$ است، بنابراین



$$\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۲}$$

ولی $\frac{۱}{۱۲}$ ، همان ربع $\frac{۱}{۳}$ است (آزمایش کنید که آیا من اشتباه نمی‌کنم).
بنابراین، مثلاً ضرب

$$۸۴\times\frac{۵}{۱۲}=۸۴\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۲}\right)=۳۵$$

می‌توان به این ترتیب، انجام داد: ابتدا، ۸۴ را به سه قسمت بکنیم، می‌شود ۲۸، سپس مقداری را که به‌دست آمده است، دوباره به چهار قسمت بکنیم، می‌شود ۷ . مجموع، ۷+۲۸ همان ۳۵ را به ما می‌دهد.

این روش، به‌خصوص کار انگلیسیها را، که با واحدهای گوناگون سروکار دارند، ساده می‌کند. مثلا، هر شلینگ آنها برابر با ۱۲ پنس است، به نحوی که در هر قدم، به تقسیم بر ۱۲ نیاز دارند.

به‌نظر می‌رسد که همهٔ عملهای اصلی را، می‌توان درمورد کسرها، انجام داد. بازهم به‌یك مثال می‌پردازیم. فرض کنید، کسی مسألهٔ ریاضی حل می‌کند. ساده‌ترین مسأله، $\frac{۱}{۳}$ ساعت وقت او را گرفته است (۲۰ دقیقه)

ودشوارترین مسأله، $\frac{۱}{۲}$ ساعت (۳۰ دقیقه)؛ به طور متوسط، برای حل هر مسأله، چقدر وقت صرف کرده است؟

ساده‌ترین ودشوارترین مسأله، رویهم به اندازهٔ

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}$$

ساعت، وقت گرفته‌اند. اگردشواری دومسأله، به‌یك اندازه بود، برای‌حل هرکدام از آنها، به اندازهٔ نصف این مجموع، وقت لازم بود. این وقت را پیدا کنیم.

روی خطی که واحدهای‌آن به شش قسمت مساوی تقسیم شده است، می‌توانیم عددهای مساوی $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ را پیدا کنیم.

$$\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳} \text{ و } \frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین، مجموع $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ چنین می‌شود:

$$\frac{۲}{۶}+\frac{۳}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

ونصف این مقدار، برابر است‌با

$$\frac{۵}{۱۲}$$

که روی خطی که‌واحدهای دوازده قسمتی دارد، واقع است.

به‌این ترتیب، برای‌حل مسأله‌ای که درحد متوسط دشواری باشد، باید $\frac{۵}{۱۲}$ ساعت (۲۵ دقیقه)، وقت صرف شود. روشن است که این زمان،

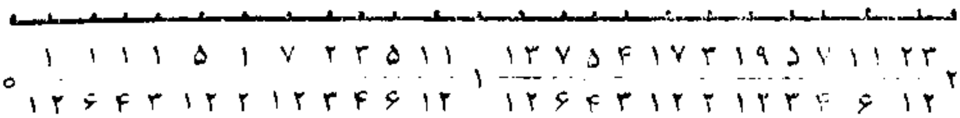
بیشتر از وقتی است کـه بـرای حل مسألهٔ ساده‌تـر لازم است و کمتر از وقتی است که برای حل مسألهٔ دشوارتر لازم است.

مقدار متوسط هردوعددی را می‌توان با محاسبهٔ نصف مجموع دو عدد، پیدا کرد. در نتیجه ، همیشه عددی بدست می‌آید کـه مقدار آن درست در وسط دوعدد داده شده، قراردارد. بـه همین مناسبت است کـه ریاضیدانان، مقدار متوسط دوعدد را واسطهٔ عددی گفته‌اند.

این‌نتیجهٔ‌بکروزیبا، چنان دورنمای‌شگفت‌انگیزی‌دربرابرچشمان‌ما می‌گشایدکه باید ایستاد وچشم از آن برنداشت.

همه جا، مجموعهٔ فشرده

یکباره، همهٔخطهای عددی را، در یك خطعددی متمرکزمی‌کنیم؛ به این ترتیب، بدون هیچ زحمتی خواهیم‌توانست هرکسری را روی‌یك خط عددی مشخص کنیم. در واقع ، استفادهٔ از چندخط عددی را بـرای روشن‌تر کردن موضوع، پیش کشیدیم. روی یك خط عددی، کسرهـایی که مقادیر برابر دارند، دریك نقطه قرار می‌گیرند؛ ومعمولاً هرنقطه را به نام کسری می‌خوانیم، که برای نخستین بار به آن برمی‌خوریم.



حالا دیگر، خط عددی ما، باعددهایی که بـه اندازهٔ کافی بـه هم نزدیکند، پوشیده شده است. فراموش نکنیم که ما تنهابعضی ازخطهای عددی راکه انتخاب کرده‌بودیم،روی این خطگذاشته‌ایم. روی خطعددی که در اینجا نشان‌داده‌ایم، تقسیمهای پنج تایی، هفت تایی، ده تایی، صد تایی و بسیاری از کسرهای دیگر واحد ، وجود ندارد! اگر فرض کنیم

که همهٔ این کسرها را روی خط عددی مشخص کرده‌باشیم، درآنصورت، نقطه‌هایی که نمایندهٔ این کسرهاست، به صورت غیرقابل تصوری، تنگ هم قرار می‌گیرند. کوشش می‌کنیم، تاحدی این وضع را روشن‌کنیم.

قبل از همه، می‌بینیم که دراینجا، عددهای درست وجود دارد؛ آنها را می‌توان، کسرهایی با مخرج واحد، به حساب‌آورد. مثلاً، عدد ۳ را می‌توان نتیجه‌ای از تقسیم سه بر واحد دانست، یعنی $\frac{۳}{۱}$.

برای عددهای درست و عددهای کسری، یك نام کلی گذاشته‌اند وآنها را عددهای‌گویا گفته‌اند (وبدیهی است که ماهنوز راه کمی را رفته‌ایم و به این عادت کرده‌ایم که حادثه‌های بدون انتظار پیش آید؛ خواننده ممکن است گمان ببرد که عددهایی هم وجود دارد که گویا نیستند).

کوچکترین کسرغیر صفر کدام است (۰ را هم می‌توان به‌صورت $\frac{۰}{۲}$، $\frac{۰}{۳}$، $\frac{۰}{۴}$ و غیره‌نشان داد)؟ روشن است که این‌کسر نمی‌تواند $\frac{۱}{۱۲}$ باشد، زیرا کسر $\frac{۱}{۱۳}$ از آن کوچکتر است؛ هر چه شیرینی را به قسمتهای کوچکتری تقسیم کنیم، سهم هرنفر، کمتر می‌شود، هرکسری را در نظر بگیریم، به همین وضع برخورد می‌کنیم: $\frac{۱}{۱۰۱}$ از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچکتراست و $\frac{۱}{۱۰۰۱}$ از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ کوچکتر است. به‌این ترتیب، بین عددهای مثبت گویا، نه تنها، بزرگترین عدد وجود ندارد (همانطورکه بین عددهای درست هم، بزرگترین عدد، وجود نداشت)، کوچکترین عدد هم پیدا نمی‌شود.

بنابراین، نمی‌توان، عددهای‌گویا را، از جایی به‌عنوان کوچکترین عدد، آغاز کرد. به این مناسبت، از نقطهٔ دلخواهی، که نمایندهٔ کسر کوچکی باشد آغاز می‌کنیم و کوشش می‌کنیم، کسرهایی را که‌درسمت

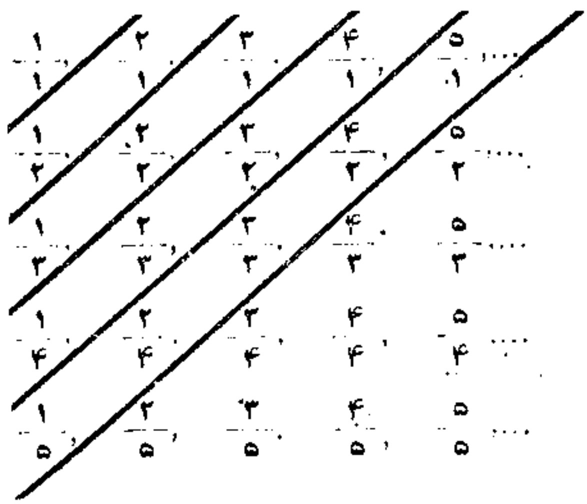
راست آن قرارگرفته‌اند، جستجو کنیم. کدام کسر ، بلافاصله بعد از $\frac{1}{12}$،و در همسایگی آن قراردارد؟ روی خط عددی که ما رسم کرده‌ایم ، بلافاصله بعد از $\frac{1}{12}$ ، کسر$\frac{1}{6}$ قرار گرفته است، ولی ما می‌دانیم که واسطهٔ عددی $\frac{1}{12}$ و $\frac{1}{6}$ ، بین این دو کسرقراردارد وبنابراین، این واسطهٔ عددی، در مقایسهٔ با $\frac{1}{6}$ ، به$\frac{1}{12}$ نزدیکتر است. هرعدددیگری را هم که سمت راست $\frac{1}{12}$ انتخاب کنیم، همیشه می‌توانیم، واسطهٔ عددی‌آنرا با $\frac{1}{12}$ بدست‌آوریم، واین واسطهٔ عددی،درمقایسه باعددی‌که انتخاب کرده‌ایم، به $\frac{1}{12}$ نزدیکتر است . به این ترتیب، یك نتیجهٔ کلی بدست می‌آوریم : هر دو عدد گویایی که به دلخواه روی خط عددی انتخاب کنیم، هرقدرهم که نزدیك به هم انتخاب شده باشند، نمی‌توانند دوعدد مجاور باشند. همیشه ، عددهای گویای دیگری بین آنها وجود دارد. می‌گوییم که مجموعهٔ عددهای گویا، در همه جا فشرده است.

بعداز آنکه دنباله‌های صعودی و نامتناهی عددهای اول راکشف کردیم، حالا، به نوع تازه‌ای از بینهایت، برخورد می‌کنیم. این بار، یك انبوهی نامحدود، یك فشردگی وغلظت نا محدود را کشف کردیم. چنان عددبزرگی وجود ندارد،که نتوان بزرگتر ازآنرا در دنبالهٔعددهای طبیعی ویا دنبالهٔ عددهای اول، پیداکرد. به مناسبت همین حقیقت است که ریاضیدانان به طور خلاصه می‌گویند: این هردو دنباله، به سمت بینهایت میل می‌کنند . در مورد وضع تازه، هیچ‌عددکوچکی پیدانمی‌شود که از همهٔ عددهای دیگر به $\frac{1}{12}$،نزدیکتر باشد . می‌گوییم که نقطهٔ $\frac{1}{12}$ نقطهٔ تجمع مجموعهٔ عددهای گویاست. وروشن است که نه تنها نقطهٔ $\frac{1}{12}$ ، بلکه هر عدد گویای دیگری را هم که انتخاب کنیم، نقطهٔ تجمعی

از این مجموعه است.

با وجود این، همهٔ عددهای گویا را می‌توان به‌صورت یك دنباله، نوشت، اگر چه این دنباله، با ردیف‌مقادیر عددها، تطبیق نمی‌کند.

قبلاً هم‌دیده‌ایم که‌عددهای گویا را می‌توان به‌صورت یك مجموعهٔ نا متناهی از دنباله‌های عددی، به صورت تقسیمهای مختلف واحد روی خطهای عددی‌مختلف، نشان داد. برای اینکه یکنواختی کار حفظ شود، عددهای درست را هم، به صورت کسر می‌نویسیم:



وغیره. حالا، باید راهی پیدا کنیم که بتوان این عددها را، بـه صورت یك دنباله نوشت. برای این منظور، همهٔ‌عددهایی را که در«ردیفهای‌مایل» قرار گرفته است، به دنبال هم، روی یك خط راست، می‌نویسیم. روشن است که بـه ایـن ترتیب، هرعددی ، دیر یـا زود، در دنبالهٔ مـا، وارد می‌شود:

$$\underline{\frac{۱}{۱}},\ \underline{\frac{۲}{۱},\frac{۱}{۲}},\ \underline{\frac{۳}{۱},\frac{۲}{۲},\frac{۱}{۳}},\ \underline{\frac{۴}{۱},\frac{۳}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۴}},\ \underline{\frac{۵}{۱},\frac{۴}{۲},\frac{۳}{۳},\frac{۲}{۴},\frac{۱}{۵}},\ \ldots$$

هر بار، گروه درازتری پیدا می‌شود، ولی در هرحال، هـرگروه از تعداد

محدودی عدد ، درست شده است: درواقع، دنباله‌ای بدست آمده است وهرکسی که ازقانون تشکیل آن آگاه باشد، می‌تواند تا هرجاکه بخواهد، آنرا ادامه دهد. این دنباله را، حتی بدون مراجعه به جدولی که تشکیل دادیم وبدون کمك گرفتن از ردیفهای مایل، می‌توان ادامه داد. برای این منظور، بایدتوجه کنیم که‌درگروه‌اول، یك کسرداریم که‌مجموع صورت ومخرج آن‌برابر است با۲؛ درگروه دوم، دوکسرداریم که‌مجموع صورت و مخرج هرکدام ازآنها برابر است با ۳ ؛درگروه سوم ، سه‌کسربامجموع صورت ومخرج برابر ۴؛ درگروه چهارم، چهارکسر با مجموع صورت ومخرج ۵؛ درگروه پنجم، پنج کسر، با مجموع صورت و مخرج برابر ۶. از آنجا که

$$۷=۶+۱=۵+۲=۴+۳=۳+۴=۲+۵=۱+۶$$

می‌توانیم، گروه بعدی را بسازیم،

$$\frac{۶}{۱}, \frac{۵}{۲}, \frac{۴}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۲}{۵}, \frac{۱}{۶}$$

وبه این ترتیب، دیگر هرکسی می‌تواند درعمل، این دنباله را ادامه‌دهد. وما، یك دنبالهٔ نامتناهی را،وقتی مشخص می‌دانیم که بتوان با تکیه به قانون تشکیل آن ، جمله‌های آنرا تا هرجایی که بخواهیم، بنویسیم.

روشن است که‌دراین دنباله، به‌عددهای مساوی،برخوردمی کنیم؛ این‌عددهای‌مساوی، حتی موقعی که با خطهای عددی هم‌سروکارداشتیم، وجود داشتند. بنابراین، اگر بخواهیم به هرعدد، تنها یکبار برخورد کنیم، باید به قانون تشکیل دنباله، تبصره‌ای اضافه کنیم: کسرهایی‌را که می‌توان ساده کرد، نباید نوشت. به این ترتیب، از قسمتی ازدنباله

را که نوشته‌ایم، باید کسرهایی مثل $\frac{۲}{۲}$،$\frac{۴}{۲}$،$\frac{۳}{۳}$ و $\frac{۲}{۴}$ را حذف کنیم ، زیرا ، $\frac{۲}{۲}$ و $\frac{۳}{۳}$ برابرند با $\frac{۱}{۱}$،$\frac{۴}{۲}$ برابر است با $\frac{۲}{۱}$ و $\frac{۲}{۴}$ برابر است با $\frac{۱}{۲}$. بنابراین ، دنبالهٔ عددهای گویا، به این ترتیب، آغاز می‌شود :

$$\frac{۱}{۱}, \frac{۲}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۱}, \frac{۱}{۳}, \frac{۴}{۱}, \frac{۳}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۵}{۱}, \frac{۱}{۵}, \ldots$$

وآنرا می‌توان، باتوجه به‌قانون تشکیل‌آن ، تا هرجا که بخواهیم،ادامه داد. بنابراین، می‌توان از نخستین، دومین، سومین،... جملهٔاین دنباله نام برد، یعنی جمله‌های دنباله را می‌توان شماره گذاری کرد. به همین مناسبت، بدون اینکه فعلاً روی این اصطلاح دقت کنیم، می‌گوییم که این دنباله شمارا است.

قوت مجموعهٔ عددهای گویا

همین حقیقت ساده، ما را بـه نتیجهٔ حیرت آوری می‌رساند: بـا وجودی‌که مجموعهٔ عددهای‌گویا، بسیار به هم فشرده‌تر است، به‌مفهوم دقیق خود، به همان تعداد مجموعهٔ عددهای درست، عضودارد.

چگونه می‌توان‌مجموعه‌های نامتناهی راباهم سنجید؟ روش‌بسیار ساده‌ای وجود دارد. اگرمن بخواهم به این مطلب پی‌ببرم که آیاتعداد پسرانی که در مجلس رقص شرکت‌کرده‌اند، باتعداد دختران یکی‌است، لازم نیست که افراد هر گروه را به طور جداگانه بشمارم. کافی است رقص آغاز شود وهر کس با زوج خود همراه شود. اگر هیچ پسری‌تنها نمانده باشدوهیچ دختری‌ازتنهایی‌به‌گوشهٔ‌دیوارپناه‌نیاورده باشد،می‌توان مطمئن‌شدکه تعداد پسرها،باتعداددخترها،یکی است.این روش مقایسه‌را،

برای مجموعه‌های نامتناهی هم می‌توان به‌کاربرد. وقتی که عضوهای دو مجموعهٔ نامتناهی را بتوان طوری با هم جفت کرد که حتی یك عضواز یك مجموعه،بدون جفتی از مجموعهٔ دیگرنباشد،گویند این دومجموعه همقوت هستند.

حالا، دنبالهٔ عددهای گویا را،که دربالا آوردیم، بادنبالهٔعددهای طبیعی، مقایسه می‌کنیم:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶،...

۱ را بانخستین جملهٔ دنبالهٔ عددهای گویا، یعنی با $\frac{۱}{۱}$ جفت می‌کنیم‌و ۲ را با دومین جمله آن، یعنی $\frac{۲}{۱}$ ؛ ۳ را با $\frac{۱}{۲}$؛ ۴ را با $\frac{۳}{۱}$ وغیره مثلاً ۱۰ را با دهمین جملهٔ دنبالهٔ عددهای گویا،یعنی $\frac{۵}{۱}$.

اگربخواهیم جفت عدد ۱۰۰ را دردنبالهٔ عددهای‌گویا پیداکنیم، باید، بنابر قاعده‌ای که می‌دانیم، صد جملهٔ اول دنبالهٔ عددهای گویا را بنویسیم، در اینصورت جملهٔ صدم، جفت عدد ۱۰۰ خواهد بود.

روشن است که‌این «جفت‌کردن» را می‌توانیم تا هرجاکه‌بخواهیم ادامه دهیم، به‌نحوی‌که نه در دنبالهٔ عددهای‌گویا ونه در دنبالهٔعددهای طبیعی، هیچ عضوی، بدون جفت باقی نمی‌ماند. بنابراین. مجموعه‌های مورد بررسی‌ما-مجموعهٔ عددهای گویاومجموعهٔ عددهای طبیعی -دارای یك قوت هستند؛ باوجودی که مجموعهٔ عددهای طبیعی درمجموعهٔ انبوه عددهای گویا، پراکنده شده است.

در اینجا، دوباره به یك حقیقت بسیار مهم برخورد می‌کنیم: با بینهایت، باید با احتیاط کامل رفتار کرد. کم نیستند کسانی که مفهوم «جزءکمتر از کل است» رابه‌عنوان یك اصل منطقی تزلزل‌ناپذیر، قبول دارند. واینك مانمونه‌ای پیداکردیم که این اصل را نفی می‌کند.

عددهای طبیعی، جزء ناچیزی از مجموعهٔ عددهای گویـا هستند، با وجود این، قوت مجموعهٔ عددهای‌طبیعی باقوت مجموعهٔ عددهای‌گویا برابر است (یعنی این دو مجموعه، همعددند). موضوع اینست که‌اصلهای منطقی کلی، از راه انتزاع و براساس‌جمع بندی مشاهده‌ها وآزمایشها، بدست می‌آید. ولی،هرمشاهده‌ای، محدود ومحیطی‌که‌آنرا دربرمی‌گیرد، تنگ است. در همین جا، ریشهٔ دشواریها پیدا می‌شود: مـردم، کوشش می‌کنند از راه اصلهایی که‌ازدنیای تنگ‌ومحدودبدست‌آورده‌اند، راهی به بینهایت پیدا کنند. ولـی، بینهایت روی دو پا بلند مـی‌شود وهمهٔ قانونها را واژگون می‌کند.

اگر بر خلاف میل‌ما، این حقیقت وجود دارد که «جزء می‌توانـد مساوی کل باشد»، دلیل آنرا بـاید در اینجا جستجو کرد کـه اصلهای منطقی،علاوه‌برآزمایش ومشاهده، برنوعی‌اطمینان ناشناخته وناآگاهانه ذهنی، تکیه دارند. ممکن است کسانی باشند که حکم « جزء می‌توانـد مساوی کل باشد» را سوء قصدی نسبت به نظم طبیعی اشیاءبدانند،ولی در ریاضیات، این شادی بی اندازه را به همراه دارد که دسترسی به این «میوهٔ ممنوع»، راه‌مارا از دنیای قانونهای دست وپاگیر وناخوش‌آیند، به جهان آزاد بینهایت، می‌گشاید.

۱۱. دوباره، بینهایت را تسخیر می‌کنیم

دوباره از «سرزمین نامتناهی»، به‌دنیای خودمان، دنیایی‌که می‌توانیم آنرالمس کنیم، برمی‌گردیم، وبه این می‌اندیشیم‌که دستهای‌ما، دستهایی که به کمك آنها بـرای شناخت دنیای واقعی نیازداریم، ۱۰ انگشت دارد.آیا می‌شودکسرها را هم به‌همان دستگاه دهدهی واردکرد؟

تبدیل کسرهای متعارفی به کسرهای دهدهی و برعکس

به یاد بیاوریم: وقتی که رقمهای یك عدد را، از راست‌به چپ در نظرمی‌گیریم، رقم اول با واحد عدد شماری بیان شده‌است (یکان)، واحد رقم بعد ده برابر واحد رقم اول است (دهگان)، واحد رقم سمت چپ آن، ۱۰برابر واحد این رقم دوم است (سدگان) وغیره. خودبه‌خود این فکر پیش می‌آید که آیا نمی‌شود این قانون را به طرف راست هم گسترش داد: سمت راست واحد، یکدهمها‌را بگذاریم وسمت راست آن یك صدمها وبعد یکهزارمها وغیره؟ ولی، لازم است که این واحدهای تازه‌را، به‌نحوی ازواحد اصلی عددشماری جداکنیم، والا، مثلاً درعدد

۱۲

نمی توانیم متوجه شویم‌که ۱، نمایندۀ واحد و۲، نمایندۀ یکدهمهاست وگمان خواهیم برد که باعدد دوازده،سروکار داریم. به این خاطر، بعد از ۱، علامت ممیز را می‌گذاریم:

۱/۲

نباید فراموش کرد که این عدد، همان مجموع

$$۱+\frac{۲}{۱۰}$$

است، که باروش ساده‌تری، نوشته شده است. به همین ترتیب داریم:

$$۳۲/۴۵۶=۳۲+\frac{۴}{۱۰}+\frac{۵}{۱۰۰}+\frac{۶}{۱۰۰۰}$$

وبه این‌ترتیب، به‌کسرهای دهدهی، می‌رسیم.

هرکسری راکه مخرج‌آن۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ وباهرتوانی‌از۱۰باشد،

می‌توان به صورت کسردهدهی نوشت. مثلاً

$$\frac{۲۳}{۱۰۰}=\frac{۲۰}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰۰}$$

کسر $\frac{۲۰}{۱۰۰}$ را می‌توان، با تقسیم صورت ومخرج آن به ۱۰، ساده‌کرد:

$$\frac{۲۳}{۱۰۰}=\frac{۲}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰۰}$$

وچون در اینجا، مقدار درست نداریم، بدست می‌آید:

$$\frac{۲۳}{۱۰۰}=۰/۲۳$$

ولی آیا هرکسر دلخواهی رامی‌توان به صورت دهدهی نوشت؟

ساده‌ترین روش، برای تبدیل کسرمتعارفی به کسر دهدهی، انجام عمل تقسیمی است که به وسیلهٔ خط کسری، نشان داده شده است

$$\frac{۶}{۵}=۶:۵=۱$$

با باقیماندهٔ مساوی ۱

باقیماندهٔ ۱ را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، که در آنصورت، باتقسیم آن بر ۵، به عدد ۲ می‌رسیم، یعنی دو واحد یکدهم. بنابراین، می‌توان نتیجه را به کمك ممیز نوشت

$$۶:۵=۱/۲$$

یعنی

$$\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

حالا، کسر $\frac{۷}{۲۵}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۷}{۲۵}=۷:۲۵=۰/۲$$

۷۰
۲۰

۲۰ واحد یکدهمی باقی می‌ماند، که می‌توان به‌جای آن ۲۰۰ واحد یکصدمی گرفت. از تقسیم ۲۰۰ بر ۲۵، به عدد ۸ می‌رسیم (۸ واحد یکصدمی):

$$۷:۲۵=۰/۲۸$$

یعنی

$$\frac{۷}{۲۵}=۰/۲۸$$

ولی، ممکن است، حتی در حالت ساده‌ای، گیر کنیم:

$$\frac{۴}{۹}=۴ \quad \left|\underline{\ ۹\ }\right. \quad ۰/۴۴...$$

۴۰
۴۰
۴

این تقسیم، هرگز تمام نمی‌شود؛ تا هر جا تقسیم را ادامه بدهیم، همیشه باقیمانده‌ای برابر ۴ بدست می‌آید. افسوس! کسر $\frac{۴}{۹}$ را نمی‌توان به‌صورت کسر دهدهی درآورد.

وچقدر، کار کردن با کسرهای دهدهی ساده‌تر است! مثلاً، ضرب

کسر دهدهی را در ۱۰ ، انتخاب کنیم. یك سرگرمی کودکانه ! برای اینکه ضرب

$$۴۵/۳۶۵ \times ۱۰$$

را انجام دهیم، کافی است توجه کنیم که ده برابر دهگان‌می‌شودسدگان، ده برابر یکان مـی‌شود دهـگان، ده برابر یکدهم می‌شود یـکان وغیره. بنابراین، خیلی ساده دیده می‌شود که برای حل مسأله، می‌توان ممیزرا یك رقم (یا به زبان دیگر، یك «مرتبه») به سمت جلوبرد:

$$۴۵۳/۶۵$$

به این‌ترتیب، واحدهای‌هر مرتبه،ده‌برابر وبنابراین،خود عدد هم‌ده‌برابر می‌شود. اگر بخواهیم، این نتیجه را دوبـاره در ۱۰ ضرب کنیم، ۱۰۰ برابر عدد نخستین بدست می‌آید کـه برابر است با ۴۵۳۶٫۵. از اینجا، معلوم می‌شودکه برای ضرب در ۱۰۰، می‌توان، ممیز را دورقم به‌طرف راست منتقل کرد.

به همین ترتیب، می‌توان متوجه شد که برای تقسیم بر ۱۰، باید ممیز را یك رقم به طرف چپ برد.

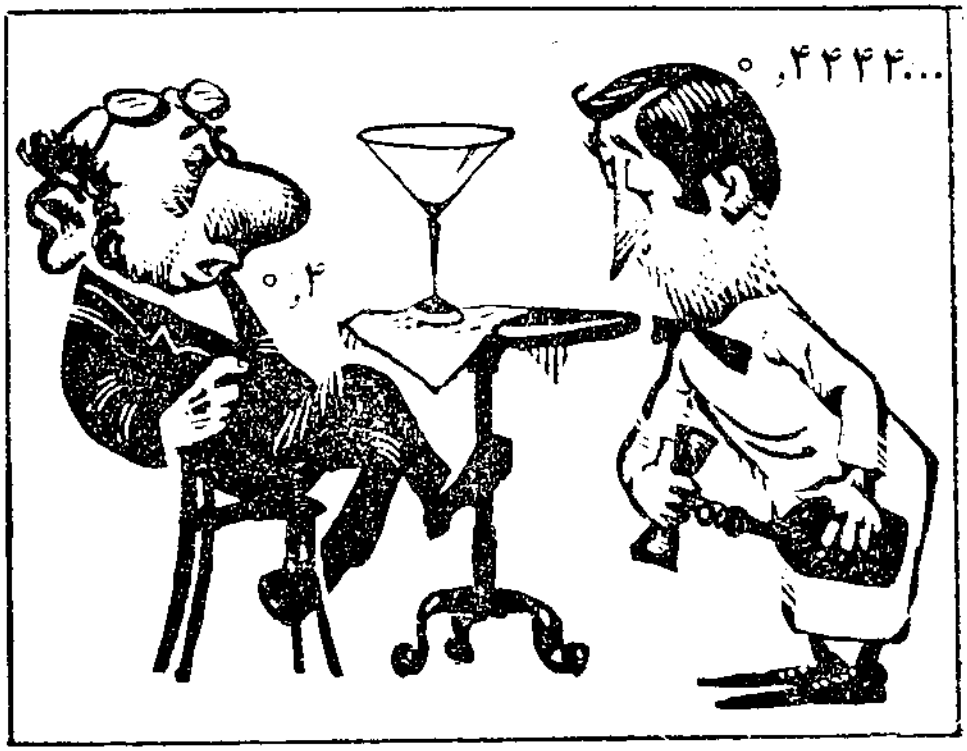
وهمین سادگی و راحتی درعمل‌باکسرهای دهدهی‌است‌که می‌توان آرزو کرد: چه خوب بود، اگرمی‌شد همهٔ‌کسرهای‌متعارفی‌را به‌کسرهای دهدهی، تبدیل‌کرد!

یکبار دیگر ببینیم، در چه موردی گرفتار شدیم؟

$$\frac{۴}{۹} = ۴:۹ = ۰/۴۴...$$

۴۰
۴۰
۴

در این تقسیم، همیشه به باقیمانده‌ای برابر ۴، می‌رسیم. بـاخردکردن این باقیمانده، ۴۰ واحد کوچکتربدست می‌آید و در این ۴۰ هم،دوباره ۴ مرتبه ۹ وجود دارد. با وجودی که این تقسیم انتها ندارد، نتیجهٔآن کاملاً روشن است. در آن، رقم ۴، بینهایت مرتبه، تکرار می‌شود.



مردی که کارعملی می‌کند (مثلاً فروشنده یا خیاط)، در این باره می‌گوید: اگر هم این‌تقسیم جایی، ومثلاً در رقم دهم بعد از ممیز،تمام می‌شد، برای من تفاوتی نمی‌کرد، زیرا من به همهٔ آن نیازی ندارم.من، حداکثر به دسی‌لیترها (دسی‌لیتر ـ یـکدهم لیتر است)، یـا سانتیمترها (سانتیمتر ـ یکصدم متر است) ، یـا گرمها (گرم ـ یکهزارم کیلو گـرم است)، کاردارم. من هیچ نیازی به این خرده بینی ندارم که بـه مقادیر کوچك ناچیزی که بعدازیکهزارم، قرارگرفته است،توجه کنیم. برای‌من، از همهٔ این کسر دهدهی نامتناهی،

تنها ۰/۴

یا ۰/۴۴

و یا ۰/۴۴۴

کافی است. به این ترتیب، به کسر $\frac{۴}{۹}$ هم می‌توان مثل همهٔ کسرهای دهدهی محدود، نگاه کرد.

ممکن است که فیزیك، برای اندازه گیریهای دقیق‌تر، به رقمهای بیشتری نیاز داشته باشد، با وجود این، در آنجا هم، برای به اصطلاح «خطا»، مرزی وجوددارد. درفیزیك، برای اینکه‌میزان خطارابرآوردکنند، از ابزارهای ناکامل واز اندامهای حسی آدمی، بـرای تکرار آزمایش، استفاده مـی‌کنند. ودر اینصورت، روشن است که توجه بـه واحدهـای بسیار کوچك، نمی‌تواند مفهومی داشته باشد. بدون شك، بـا پیشرفت ابزارها دقت اندازه‌گیری، روز به روز بیشتر می‌شود، ولی همیشه ودر هرحال، خطایی وجود دارد. وقتی که آغازبه‌نوشتن عدد

۰/۴۴۴۴...

می‌کنیم، بایدجایی‌بایستیم، ولواینکه جای دوری باشد. این موضوع که نمی‌دانیم در کدام رقم بعداز ممیز باید بایستیم، هیچ اشکالی به وجود نمی‌آورد؛ همین آگاهی قبلی که می‌توانیم رقمهای دهدهی را تـا هرجا که بخواهیم ادامه دهیم، برای معلوم بودن شکل دهدهـی‌کسر $\frac{۴}{۹}$ کافـی است. ما می‌دانیم که تا هرجا رقمهای بعد از ممیز را ادامه دهیم، بـا رقمهای چهار، وتنها با رقمهای چهار، سرکارداریم.

آیا، به این مفهوم، می‌توانیم هرکسر متعارفی را به‌شکل دهدهی خود، تبدیل کنیم؟ به زبان دیگر: اگـر در تقسیم، هرگز بـه باقیماندهٔ

برابر صفر نرسیم، آیا دست کم برای رقمهای دهدهی، می توان قانونی پیدا کرد که بنابرآن، ادامهٔ رقمها، تا هرجا که لازم است ، ممکن باشد؟

به سادگی معلوم می‌شود که به این پرسش می‌توان، پاسخ مثبت داد. هرتقسیمی از این نوع، دیر یا زود متناوب می‌شود، یعنی گروهی از رقمها پیدا می‌شود که از جایی بـه بعد، همانها مرتباً تـکرار می‌شود.

مثلاً، کسر $\frac{۲۱}{۲۲}$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که درهرتقسیم بر ۲۲، باقیماندهٔ تقسیم از ۲۲ کوچکتر است. اگرتقسیم، بی‌پایان باشد، هرکدام از باقیمانده‌ها، برابر با یکی از عددهای زیر می تواند باشد:

۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۲،۱۳،۱۴،
۱۵،۱۶،۱۷،۱۸،۱۹،۲۰،۲۱

فرض کنیم ۲۱ کشو داشته باشیم واین عددها، شماره‌های ایـن کشوهـا باشد. اگر،مثلاً درتقسیم به‌باقیماندهٔ ۷ رسیدیم،گلوله‌ای درکشوشمارهٔ ۷ می‌گذاریم. اگر حوصله داشته باشیم وتقسیم را ۲۲ بار انجام دهیم، در ۲۱ کشو، ۲۲ گلوله گذاشته می‌شود. بنابراین به طـور قطع، دست کم در یکی از کشوها ، دو گلوله خواهد بود ، یعنی دست کم بعد از ۲۱ گام، باقیمانده تکرار می‌شود.ولی، وقتی کـه یکی از باقیمانـده‌ها، تکرار شد، به معنای اینست که همه چیز دوباره از نـو شروع می‌شود. البته، بسیار پیش می‌آیدکه این باقیمانده، خیلی زودتر تکرار می‌شود.

حالا، به مثال مشخص خود بپردازیم:

$$\frac{۲۱}{۲۲}=۲۱:۲۲=۰/۹۵۴$$

۲۱۰
۱۲۰
۱۰۰
۱۲

صبر کنیم! باقیماندهٔ ۱۲ را قبلاً داشتیم. یعنی از اینجا بـه بعد، تکرار شروع می‌شود:

```
۲۱ : ۲۲ = ۰/۹۵۴۵۴۵۴
۲۱۰
 ۱۲۰
  ۱۰۰
   ۱۲۰
    ۱۰۰
     ۱۲۰
      ۱۰۰
       ۱۲
```

به جز رقم ۹، که از نظم پیروی نمی‌کند ، گروه رقمها ـ یعنی ۵۴ ـ بینهایت بار، تکرار می‌شود.

برعکس، اگر کسر دهدهی متناوبی داشته باشیم، می‌توانیم کسر متعارفی‌را، که‌این کسر دهدهی ازآن به‌وجودآمده است ،پیداکنیم. کسر دهدهی...۰/۹۵۴۵۴۵۴ رادرنظرمی‌گیریم وفرض‌می‌کنیم ازکسرمتعارفی که به این‌کسر متناوب دهدهی تبدیل شده است، اطلاعی نداشته باشیم. مقدار کسر متعارفی نظیر آنرا، x می‌گیریم، یعنی

$$x = ۰/۹۵۴۵۴۵۴...$$

اگر، این عدد را ۱۰۰۰ برابر کنیم، یعنی ممیز را به اندازهٔ سه رقم به طرف راست جلو ببریم، تا پایان نخستین دورهٔ گردش آن، بـه صورت عددی درست درمی‌آید:

$$۱۰۰۰x = ۹۵۴/۵۴۵۴...$$

واگر، x را ۱۰ برابر کنیم، تنها رقمی که در دورهٔ گردش، شرکت‌ندارد، قبل از ممیز قرار می‌گیرد:

$$۱۰X = ۹/۵۴۵۴۵۴...$$

حالا، مقداراخیررا ازمقدار اولی کم‌می‌کنیم.ازیکطرف،وقتی که ۱۰x را از ۱۰۰۰x کم کنیم، ۹۹۰x بدست می‌آید، از طرف دیگر، در هردوعدد، مقدار بعد از ممیز، یکی است، زیرا درهر دوی آنها، عدد ۵۴، بینهایت مرتبه، تکرار شده است. بنابراین برای اینکه تفاضل آنها را پیدا کنیم، باید ۹ را از ۹۵۴ کم کنیم، که در نتیجه بدست می‌آید:

$$۹۹۰X = ۹۴۵$$

که اگر حالا، دوطرف تساوی را بر ۹۹۰ تقسیم کنیم، می‌شود

$$X = \frac{۹۴۵}{۹۹۰}$$

این کسر را می‌توان به ۴۵ ساده کرد:

$$۹۴۵ : ۴۵ = ۲۱ \quad ، \quad ۹۹۰ : ۴۵ = ۲۲$$

وبنابراین

$$X = \frac{۲۱}{۲۲}$$

در همهٔ آنچه که انجام دادیم، یك گام را بابی توجهی برداشتیم ما ...۰/۹۵۴۵۴۵۴ را، به عنوان عددی که معین است، در نظرگرفتیم و باوجودی که رقمهای‌آنرا بی‌پایان به‌حساب آوردیم، مثل حالت‌مقادیر

محدود، عملهای ضرب را انجام دادیم. برچه پایه و بنابر کدام قانون، ما از ابتدا، فرض را براین گذاشتیم که ...۰/۹۵۴۵۴۵۴ معنای معین و محدودی دارد؟

رشته‌های بینهایت

این موضوع را به تفصیل، روی نمونهٔ ساده‌ای ، بررسی می‌کنیم، آیا

$$۱/۱۱۱...$$

که در آن رقم ۱، بینهایت بار تکرار می‌شود، مفهوم معینی دارد؟جالب اینست که اینگونه شکلهای‌دهدهی بی‌پایان، کسی را غصه‌دار نمی‌کند، در حالیکه مجموع بی‌پایان

$$۱+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰۰۰}+...$$

ترسناکتر به نظرمی‌رسد،گرچه، تنها ازلحاظ شکل نوشتن با کسردهدهی بی‌پایان ما، تفاوت دارد. شگفتی‌آور است که مردم با بی میلی به‌این مجموعهای بی پایان می‌پردازند، در حالیکه با شکل ...۱/۱۱۱، خیلی زود موافقت می‌کنند. دنباله

$$۱ , \frac{۱}{۱۰} , \frac{۱}{۱۰۰} , \frac{۱}{۱۰۰۰} , \frac{۱}{۱۰۰۰۰} ,...$$

را می‌توان، دنباله‌ای معین به حساب آورد، زیراجمله‌های این دنباله را تا هر جا که لازم باشد، می‌توان ادامه داد. با وجود این، پذیرفتن این حقیقت، که این راه بی‌پایان، تا انتهای آن قابل پیمودن است و گفتگو

از مجموع بینهایت عددی که در آن وجوددارد، شجاعت ودلیری بیش از اندازه‌ای می‌خواهد. این موضوع را چگونه باید فهمید؟

یکی از ریاضیدانان، وقتی که هنوز دانش آموز کوچکی بود، مفهوم مجموع بینهایت را، به این ترتیب، برای خود روشن کرد.

شیرینی فروشی، برای اینکه مشتریهای خود را به طرف نوع معینی شکلات جلب کند، در لفاف هر بسته شکلات، یك حواله قرار داد. هرکسی که ۱۰تا از این حواله‌ها را می‌داد، می‌توانست یك بسته شکلات جدید بگیرد: هربستهٔ شکلات بابسته بندی آن، درواقع، چقدر می‌ارزد؟

روشن است که گفتگو برسر ارزش خود شکلات نیست، زیرا زیر لفاف هربسته، حواله‌ای وجود دارد که در برابر آن می‌توان $\frac{۱}{۱۰}$ بسته شکلات را دریافت کرد (برای هر۱۰ حواله، یك بسته). همراه این یکدهم شکلات، یکدهم حواله وجود دارد، وچون برای هر حواله، $\frac{۱}{۱۰}$ شکلات می‌دهند، در برابر این $\frac{۱}{۱۰}$ حواله، می‌توان $\frac{۱}{۱۰۰}$ شکلات دریافت کرد.

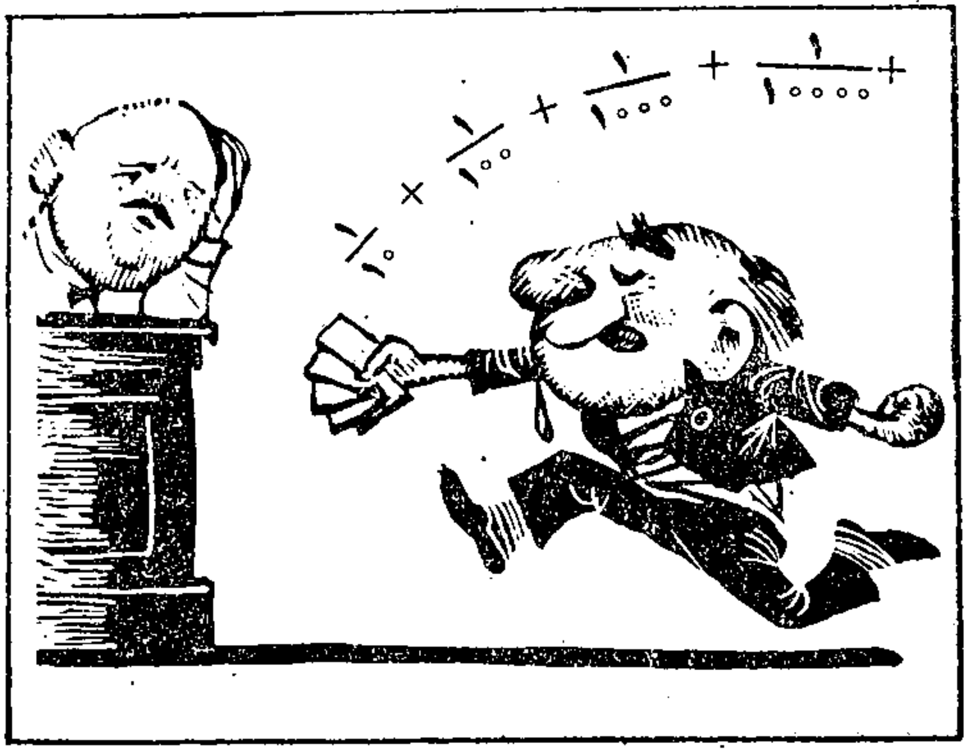
همراه این $\frac{۱}{۱۰۰}$ شکلات، $\frac{۱}{۱۰۰}$ حواله‌وجود دارد، که به اندازهٔ یکدهم آن، یعنی به اندازه $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ شکلات، ارزش دارد.

به همین ترتیب، می‌توان استدلال را، بدون اینکه تمام شود، ادامه داد. روشن است که‌این زنجیر، هرگزبه‌پایان خودنمی‌رسد وبنابراین ارزش هربسته شکلات در واقع به اندازهٔ

$$۱+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰۰}+\cdots$$

شکلات است.

حالا، باروش دیگری کشف می کنیم که ارزش هرشکلات با بسته بندی آن برابراست با $۱ + \frac{۱}{۹}$. روشن است که عدد ۱، نمایندهٔ ارزش خود شکلات، بدون بسته بندی آنست؛ بنابراین، باید ثابت کنیم که ارزش حواله، برابراست با ارزش $\frac{۱}{۹}$ شکلات. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که ارزش ۹ حواله برابر است با ارزش یك شکلات؛ در اینصورت، ارزش یك حواله برابر با یك نهم آن خواهد شد.



این حقیقت را که ۹ حواله، به اندازهٔ یك شکلات (بدون بسته ـ بندی) ارزش دارد، می‌توان بلافاصله کشف کرد: فرض کنید، من ۹ حواله داشته باشم. پیش شیرینی فروش می‌روم ومی گویم «خواهش می کنم، یك بسته شکلات به من بدهید. من اول آنرا می‌خورم وبعد ارزش آنرا می‌پردازم». شکلات را می‌خورم وحوالهٔ آنرا، به ۹ حواله‌ای که داشتم

اضافه می‌کنم. حالا، من ۱۰ حواله دارم و می‌توانم به‌کمك آنها، بدهی خود را بپردازم . شکلات را خورده‌ام و هیچ حواله‌ای هم برایم باقی نمی‌ماند. به‌این ترتیب، ۹ حواله ، متناظر است با یك شکلات ، یا یك حواله برابر است با $\frac{۱}{۹}$ شکلات و بنابراین ، هرشکلات با حواله‌ای که به همراه دارد (یعنی یك بسته شکلات) ، به اندازه $۱\frac{۱}{۹}$ شکلات ارزش دارد. از اینجا، معلوم می‌شود که مجموع رشتهٔ بی‌پایان

$$۱+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰۰}+\ldots$$

دقیقاً برابر است با $۱\frac{۱}{۹}$. اگر چه این مجموع ، در دسترس ما به سادگی قرار نمی‌گیرد، ولی در مثالی که آوردیم، حتی قابل خوردن بود.

نتیجه‌ای را که بدست آوردیم، می‌توان به‌این‌ترتیب، منظم کرد: اگر مقداری، درنخستین‌تقریب خود برابر ۱ باشد، درتقریب کمی‌بهتر برابر است‌با $۱+\frac{۱}{۱۰}$ ، ودر تقریب بازهم بهتر [۱] (ولی هنوز غیر دقیق) برابر $۱+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}$ و به همین ترتیب تا آخر. در اینصورت، مقدار کاملاً دقیق آن برابر است با عدد $۱\frac{۱}{۹}$.

حالا، من می‌توانم به وعده‌ای که پیش از این داده‌ام، وفاکنم . به‌مفهوم بحثی که همین حالا کردیم، درستی این نتیجه‌گیری هم روشن می‌شود که: مساحت دایره را می‌توان به تقریب، به وسیلهٔ مساحتهای چندضلعیها ، بیان کرد. همچنین ، قانون جایگیری عددهای اول را هم باید درست به همین معناگرفت، روشن است‌که من به اطمینان‌خواننده

---

۱. دربخش بعدی، دربارهٔ مفهوم‌کلی «مقدار تقریبی»، گفتگوخواهیم‌کرد.

نسبت به حرفم تکیه دارم و به همین مناسبت، لزومی به اثبات طولانی آن ندیدم.

در جبر می‌توان عـددی را، مثلاً بـه این ترتیب پیدا کـرد: x عبارتست از عددی که اگر آنرا بر۲ تقسیم، سپس در ۳ ضرب وسر آخر با ۵ جمع کنیم، ۱۱ بدست آید؛ یعنی ، x عـددی است کـه درمعادلهٔ زیرصدق می کند:

$$\frac{x}{۲}\cdot ۳+۵=۱۱$$

ولی حالا، ما با روش دیگری برای تعیین عددها، آشنا شدیم. شاخه‌ای‌از ریاضیات که درآن می‌توانیم مقدار عدد را به یاری مقادیر تقریبی، با هر دقتی که لازم باشد ، بدست آوریم، آنالیز نامیده می‌شود.

حالا مسأله را از طرف دیگرش بـررسی می‌کنیم و به عـدد $۱\frac{۱}{۹}$ می‌پردازیم. واحد را می‌توان به صورت نه نهم نوشت وبـدست آورد:

$$۱\frac{۱}{۹}=\frac{۹}{۹}+\frac{۱}{۹}=\frac{۱۰}{۹}=۱۰:۹=۱/۱۱۱۱\ldots$$

ضمناً، برابری عدد $۱\frac{۱}{۹}$ را با ایـن عـدد دهـدهی نامتناهی، همین حـالا، ثابت کردیم.

ریاضیدانان‌دراین‌باره، اینطورمی گویند: دنبالهٔ مجموعهای‌جزیی

$$۱؛ ۱/۱=۱+\frac{۱}{۱۰}؛ ۱/۱۱=۱+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}؛\ldots$$

به سمت حد $۱\frac{۱}{۹}$ میل می‌کند. به همین ترتیب می‌گویند: رشتهٔ

$$۱+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}+\dots$$

همگرا (متقارب) است و مجموع آن برابر است با $۱\frac{۱}{۹}$.

به این‌ترتیب، بـا مفهوم تازه‌ای از جمع روبرو می‌شویم و بایـد تحقیق کنیم که آیا قانونهای محاسبه، دراینجا هم درست درمی‌آیند یا نه. خود را وارد محاسبه‌های خسته‌کننده نمی‌کنیم وتنها به نتیجهٔ آن می‌پردازیم. پاسخ، منفی است.

مثل اینست که در اینجا ، بینهایت از قفس قانـونهای ما فـرار می‌کند. به‌همین مناسبت، در مورد رشته‌هاکه جمله‌های آنها رامی‌توان به دلخواه جابه‌جا و یاگروه بندی کرد ـ باید بررسی ویژه‌ای بشود. از این نقطه نظر، رشتهٔ $۱+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}+\dots$را می‌توان رشته‌سر به راهی دانست. ولی، به این رشته بپردازیم:

$$۱-۱+۱-۱+۱-۱+\dots$$

اگر جمله‌های این رشته را تغییر بدهیم و به جای هر دو جملهٔ پشت سر هم نتیجهٔ‌آنها را، انتخاب کنیم:

$$\underbrace{۱-۱}_{۰}+\underbrace{۱-۱}_{۰}+\underbrace{۱-۱}_{۰}+\dots$$

رشته‌ای‌بدست می‌آید که همهٔ جمله‌های‌آن برابر صفر است. وروشن‌است که‌هر چند مرتبه‌که صفر رابا خودش جمع‌کنیم، همیشه به‌نتیجه‌ای‌برابر صفر می‌رسیم.یعنی مجموع رشته،برابراست باصفر. ولی اگرگروه‌بندی را به این ترتیب، درست کنیم:

$$۱ - \frac{۱+۱}{۰} - \frac{۱+۱}{۰} - \ldots$$

به این رشته می‌رسیم:

$$۱+۰+۰+۰+\ldots$$

که حاصلجمع آن، برابر است با ۱. می‌بینیدکه این حکم نادرست‌است که عملها را می‌توان دربارهٔ هر دنبالهٔ دلخواهی انجام داد.

یك حکم، همه جا درست است: رشتهٔ بینهایت را می‌توان جمله به جمله، در عدد داده شده ضرب کرد.

ببنیم، به یاری نتیجه‌ای که بدست آوردیم، می‌توان چیز جالب دیگری هم بدست آورد؟ اگر از عدد

$$۱/۱۱۱۱\ldots = ۱\frac{۱}{۹}$$

یك واحد کم کنیم، بدست می‌آید:

$$۰/۱۱۱۱\ldots = \frac{۱}{۹}$$

حالا، مقداری را که‌بدست‌آورده‌ایم، در۹ضرب می کنیم،می‌شود

$$۰/۹۹۹۹\ldots = \frac{۹}{۹} = ۱$$

اگر این مقدار را به ۱۰ تقسیم‌کنیم، بدست می‌آید

$$۰/۰۹۹۹۹\ldots = ۰/۱$$

واگر دوباره به ۱۰ تقسیم کنیم، بدست می‌آید

$$0/009999... = 0/01$$

وغیره.

بنابراین، کسرهای محدود ۱، ۰/۱، ۰/۰۱، ... را هم می‌توان به صورت کسر نامتناهی نوشت، به این ترتیب کـه چند صفر قرار دهیم و سپس به دنبال آن، رقم ۹ را تکرار کنیم. از همین جا، بلافاصله نتیجه می‌شود که هر کسر دهدهی محدود را می‌توان به دو طریق، به شکل نامتناهی نوشت. مثلاً، کسر محدود ۰/۲ را می‌توان ابتدا، به این صورت نوشت:

$$0/20000 ...$$

(اضافه کردن صفرها، مقدار عدد را تغییر نمی‌دهد). همین ۰/۲ را به این صورت هم می‌توان نوشت:

$$0/19999...$$

زیرا، می‌دانیم که ۰/۱ برابر است با عدد ...۰/۰۹۹۹۹ (می‌توان ثابت کرد که این تنها دو گانگی است کـه در بیان کسرهای دهـدهی وجود دارد).

در رشتهٔ

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$$

هر جمله، یکدهم جملهٔ قبلی است. می‌توان گفت که هر جمله، از ضرب جملهٔ قبلی در $\frac{1}{10}$ بدست می‌آید. تصاعد حسابی را به خاطر بیاورید: در آنجا، اختلاف هر دوجملهٔ پشت سرهم، مقدار ثابتی بود. رشته‌ای کـه

در آن، خارج قسمت هردوجملهٔ پشت سرهم، مقدار ثابتی باشد، تصاعد هندسی نامیده می‌شود.

نباید اطمینان خاطر بیخودی پیدا کرد وگمان کرد که ما می‌توانیم هر رشتهٔ نامتناهی را جمع‌بندی کنیم. مثلاً، تصاعد هندسی

$$۱+۱۰+۱۰۰+۱۰۰۰+\dots$$

را در نظرمی‌گیریم، که در آن، نسبت هردو جملهٔ پشت سرهم، برابر است با ۱۰. روشن است که مجموعهای جزئی این‌رشته، دیر یا زود، از هر عدد دلخواهی بزرگترمی‌شود (مثلاً، هرمجموعی که‌بیش‌ازچهارجمله داشته باشد،از ۱۰۰۰ بزرگتر است)، وبنابراین، رشتهٔ ما تا بینهایت، پیش می‌رود. همین وضع در مورد رشتهٔ تصاعد هندسی با نسبت ثابت ۱، یعنی تصاعدی که هر جمله آن ۱ برابر جملهٔ قبلی باشد، نیز درست است:

$$۱+۱+۱+۱+۱+۱+\dots$$

در اینجا، هر مجموعی که بیش از هزار جمله داشته باشد، از ۱۰۰۰ بزرگتر است وهر مجموعی که‌بیش از یك میلیون جمله داشته‌باشد،از ۱۰۰۰۰۰۰ بزرگتر است وغیره.

بالاخره، اگر هر جمله، از ضرب جملهٔ قبل در ۱ـ بدست آید، چون (۱ـ) × ۱ برابر است با ۱ـ؛ (۱ـ). (۱ـ) برابراست با ۱+؛ دوباره (۱ـ) . (۱+) برابر است با ۱ـ وغیره، به این رشته می‌رسیم:

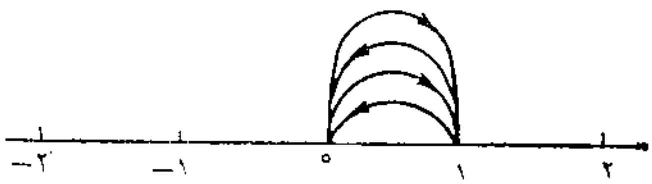
$$۱-۱+۱-۱+۱-۱+۱-۱+\dots$$

که ما بازی‌نمایشی و حیله‌گرانهٔ آنرا، پیش‌ازاین دیده‌ایم. مجموعهای جزئی

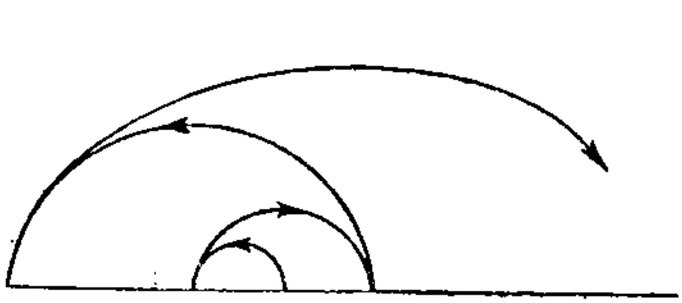
این رشته، چنین است:

$$۱;$$
$$۱-۱=۰;$$
$$\underline{۱-۱}+۱=۰+۱=۱;$$
$$\underline{۱-۱}+\underline{۱-۱}=۰+۰=۰$$

از اینجا دیده می‌شود کـه مجموعهای جزئی، بـه نوبت برابر بـا ۰ و ۱ می‌شود.



این مجموع، مرتباً از عدد ۱ بـه عدد ۰ و از عـدد ۰ به عدد ۱، می‌پرد (یعنی بین ۱ و ۰ نوسان می‌کند) و به همین مناسبت، نمی‌تواند به عدد معینی نزدیك شود . در حالتی که نسبت جمله‌های پشت سرهم، عددی منفی و از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از واحد باشد، ایـن پرشها ، مرتباً بزرگتر وبزرگتر می‌شود. دراینصورت، طرح آن به صورتی است که در زیر دیده می‌شود.



به‌این ترتیب، ازهمهٔ انواع رشته‌هایی که تا اینجا آوردیم، تنها می‌توانیم‌رشتهٔ زیر را جمع بندی‌کنیم:

$$۱+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰۰}+\dots$$

و روشن است که این موضوع، به این حقیقت بستگی دارد که جمله‌های این رشته مرتب کوچك و کوچکتر می‌شود وحتی، اگر بـه اندازهٔ کافی جلو برویم، به هراندازه که بخواهیم، کوچك می‌شود. این جمله‌ها(مثال مربوط به‌شکلات رابه خاطر بیاورید)، به سمت صفر میل می‌کنند(یعنی می‌توان ثابت کرد که اگـر مقداری در تقریب اول برابر ۱، در تقریبی بهتر از آن برابر $\frac{۱}{۱۰}$ و در تقریبی باز هم بهتربرابر $\frac{۱}{۱۰۰}$ بـاشد وغیره، مقدار دقیق این مقدار، تنها می‌تـواند برابر صفر شود. از این بـه بعد، من دیگر به بررسی طولانی نخواهم پرداخت وتنها به نمونهٔ کاملاً دقیق شکلات، اشاره خواهم کـرد) . به این ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت که اگربخواهیم مجموع بینهایت عددرا پیداکنیم،واگرجمله‌های «دوردست» مرتباً کوچکتر وناچیزتر شوند، دراینصورت این جمله‌ها، تأثیر کمی در نتیجه خواهند داشت وبنابراین، هـرچه مجموع جزئی، «دورتر» برود، به همان اندازه تصور در بارهٔ مجموع کلی عددها، دقیق‌تر می‌شود.

باوجود این،وجود چنین‌جمله‌هایی‌هم،برای‌امکان‌جمع‌بندی‌رشته، کافی نیست. دنبالهٔ

$$۱;\frac{۱}{۲};\frac{۱}{۳};\frac{۱}{۴};\frac{۱}{۵};\dots$$

هم، اگر چه ملایمتر از مثال قبلی، ولی بهرحال به سمت صفر میل می‌-کند (درمثال قبلی، همهٔ جمله‌های‌بعد از جملهٔ چهارم، از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ کوچکتر

بود، در حالیکه در اینجا، جمله‌های بعد از جملهٔ هزارم، از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ کوچکتر است). ولی مجموعهای جزیی رشتهٔ

$$۱+\frac{۱}{۲}+\underline{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}}+\underline{\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸}}+$$

$$+\underline{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۱}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۳}+\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۱۶}}+\dots$$

به سمت بینهایت میل می‌کند.

این موضوع را به این ترتیب، می‌توان ثابت کرد، می‌دانیم که وقتی مخرج کسر بزرگ‌شود، مقدار کسر کوچك‌می‌شود (اگر کیك‌را بین‌افراد بیشتری قسمت‌کنیم، سهم کمتری به‌هر نفرمی‌رسد). بنابراین، اگر به‌جای $\frac{۱}{۳}$ کسر کوچکتر $\frac{۱}{۴}$، و به جای $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۷}$، کسر کوچکتر $\frac{۱}{۸}$ وبالاخره به‌جای کسرهای $\frac{۱}{۹}$، $\frac{۱}{۱۰}$، $\frac{۱}{۱۱}$، $\frac{۱}{۱۲}$، $\frac{۱}{۱۳}$، $\frac{۱}{۱۴}$، $\frac{۱}{۱۵}$، کسر کوچکتر $\frac{۱}{۱۶}$ وغیره، قرار دهیم، مجموعهای جزئی کوچکتر می شود. به طورکلی، باید همیشه تا جمله‌ای جلورفت‌که مخرج آن توانی ازعدد ۲ باشد ($۲^۲=۴$، $۲^۳=۸$ $۲^۴=۱۶$)وهمهٔ جمله‌هایی را که در سمت چپ آن قرار گرفته، به آن تبدیل کرد. روشن است که مجموعهای جزئی رشتهٔ

$$۱+\frac{۱}{۲}+\underline{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}}+\underline{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}}+$$

$$+\underline{\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}}+\dots$$

کوچکتر از مجموعهای جزیی رشتهٔ اصلی ماست.

مجموع جمله‌ها، در گروههای جداگانه، چنین‌اند:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

روشن است که در هر گروه، مجموع جمله‌ها برابر با $\frac{1}{2}$ مـی‌شود. ولی ۲۰۰۰ بار $\frac{1}{2}$ برابر ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰۰۰۰ بار $\frac{1}{2}$ برابر یك ملیون مـی‌شود. به این ترتیب، وقتی که تعداد جمله‌ها را، به اندازهٔ کافی زیاد بگیریم، مجموع آنها می‌تواند از هر عـدد دلخواه، بـزرگتر شود. و طبعاً همین وضع، برای رشتهٔ اصلی ما هم وجود دارد.

بنابراین، برای اینکه رشته‌ای متقارب بـاشد، کافی نیست کـه جمله‌های آن به سمت صفر میل کند، بلکه باید این میل به سمت صفر، به‌اندازهٔ کافی سریع باشد.

۱۲. خط عددی پرمی‌شود

در تبدیل کسرهای متعارفی به دهدهی، نظم عجیبی‌دیده می‌شود. در این تبدیل تنها به کسرهای دهدهی محدود ویا به کسرهای دهدهی با دورهٔگردش‌ثابت، برخورد می‌کنیم. ضمناً، ما به این فکرهم خوگرفته‌ایم که به هر کسردهدهی، به عنوان یك عدد معین، بنگریم. بابررسی عـدد

...۱/۱۱۱ به این نتیجه رسیدیم که این عدد مقدار $۱\frac{۱}{۹}$ را به ما می‌دهد. بعید است که این فکر به ذهن ما نرسد: آیا کسردهدهی می‌توان در نظر گرفت که دوره‌ای نباشد؟ و آیا چنین کسردهدهی، متناظر با یک عدد است؟

عددهای گنگ

به سادگی، می‌توان کسردهدهی در نظر گرفت که دوره‌ای نباشد، ولی، در عین حال از قانون معینی، پیروی کند و با به کاربردن این قانون بتوانیم رقمهای دهدهی راتاهرجاکه بخواهیم، بنویسیم. گرچه چنین کسری کاملاً غیر مشخص نیست، ولی به هرحال دورهٔ گردشی هم ندارد. این نمونه‌ای از اینگونه کسرهاست:

۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰۰۱ ...

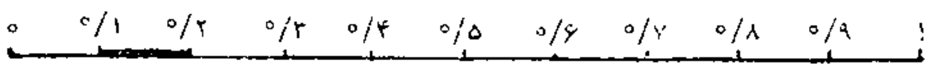
قانونی که بنابرآن، این کسر ساخته شده است، خیلی ساده است: همیشه بعداز رقم ۱، رقمهای صفر قرار گرفته است، منتهی تعداد صفرها، در هر بار، یکی بیشتر از دفعهٔ پیش است. در اینجا، از هیچگونه دورهٔ گردشی نمی‌توان گفتگو کرد، زیرا در اینصورت، رقم ۱ باید دیریازود با فاصله‌های یکنواخت ظاهر شود. به‌همین‌مناسبت، آنچه را که نوشته‌ایم، سرچشمهٔ کسری ندارد (یعنی نمی‌تواند از یك کسر به وجود آمده باشد)، ومجموعه‌های جزئی آن، به سمت یك عدد گویا، میل نمی‌کند.

باوجوداین، ما خواهیم دید که این مجموعه‌های جزئی به‌چیزی نزدیك می‌شوند: به فاصله‌ای از مجموعه‌ای ازعددهای گویا. واز اینجا می‌توان بلافاصله این نتیجه را بدست آورد که بین عددهای گویا، باوجودی که

بی‌اندازه به هم نزدیکند، جاهای خالی و رخنه‌هایی وجود دارد.

اگر دراین‌بیان دهدهی، روی یکدهمها بایستیم، وهمهٔ بقیهٔ رقمها را حذف کنیم، معلوم می‌شود که همهٔ مجموعهای جزئی از ۰/۱ بیشترند. ازطرف‌دیگر، روشن است که همهٔ این مجموعهای جزئی، از ۰/۲ کمترند، که البته، همانطور که پیش از این هم صحبت کرده‌ایم می‌توان به‌جای ۰/۲، عدد ...۰/۱۹۹۹ را درنظر گرفت،

به‌این‌ترتیب، همهٔ مجموعهای جزئی پشت سرهم، بین ۰/۱ و ۰/۲ واقع‌اند، یعنی روی فاصله‌ای ازخط عددی، که در اینجا با خط کلفتر نشان داده شده است، قرار دارند:



هر نقطه از این فاصله را، می‌توان به عنوان تقریب اول، انتخاب کرد. اگر حالا، تنها تا رقمهای یکهزارم را در نظر بگیریم، معلوم می‌شود که این مجموعهای جزئی، بین دوعدد

۰/۱۰۱ و ۰/۱۰۲

قرار گرفته‌اند. این فاصله را روی شکل، به‌سختی می‌توان نشان داد، زیرا این دونقطه، خیلی به هم نزدیکند و اختلاف بین آنها، تنها برابر با یکهزارم است. نقطه‌های واقع در این فاصله، که به‌طور کامل در داخل فاصلهٔ قبلی قرار گرفته است، تقریب بهتری از عدد را به‌ما می‌دهند.

اگر همین استدلال را ادامه دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که همهٔ

...۱/۱۱۱ به این نتیجه رسیدیم که این عدد مقدار $۱\frac{۱}{۹}$ رابه مامی‌دهد. بعید است که این فکر به ذهن مانرسد: آیا کسردهدهی می‌توان در نظر گرفت که دوره‌ای نباشد؟ و آیا چنین کسردهدهی، متناظر با یک عدد است؟

عددهای گنگ

به سادگی، می‌توان کسردهدهی در نظر گرفت که دوره‌ای نباشد، ولی، در عین حال از قانون معینی پیروی کند و با به کاربردن این قانون بتوانیم رقمهای دهدهی راتاهرجاکه بخواهیم ، بنویسیم. گرچه چنین کسری کاملاً غیر مشخص نیست، ولی به هرحال دورهٔ گردشی هم ندارد. این نمونه‌ای از اینگونه کسرهاست:

$$۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰۰۱...$$

قانونی که بنابرآن، این کسر ساخته شده است، خیلی ساده است: همیشه بعداز رقم ۱، رقمهای صفر قرار گرفته است ، منتهی تعداد صفرها، در هر بار، یکی بیشتر از دفعهٔ پیش است. در اینجا، از هیچگونه دورهٔ گردشی نمی‌توان گفتگو کرد، زیرا در اینصورت، رقم ۱ باید دیریازود با فاصله‌های یکنواخت ظاهر شود. به‌همین‌مناسبت، آنچه را که نوشته‌ایم، سرچشمهٔ کسری ندارد(یعنی نمی‌تواند از یك کسر به وجود آمده باشد)، ومجموعه‌های جزئی آن، به سمت یك عدد گویا، میل نمی‌کند.

باوجوداین، ما خواهیم دیدکه‌این‌مجموعهای‌جزئی‌به‌چیزی‌نزدیك می‌شوند: به فاصله‌ای از مجموعه‌ای‌ازعددهای‌گویا. واز اینجا می‌توان بلافاصله این نتیجه را بدست آورد که بین عددهای گویا، باوجودی‌که

بی‌اندازه به هم نزدیکند، جاهای خالی و رخنه‌هایی وجود دارد.

اگر در این بیان دهدهی، روی یکدهمها بایستیم ،وهمهٔ بقیهٔ رقمها را حذف کنیم، معلوم می‌شودکه همهٔمجموعهای جزئی از ۰/۱ بیشترند. ازطرف‌دیگر، روشن است که همهٔ این مجموعهای جزئی، از ۰/۲ کمترند، که البته، همانطور که پیش از این هم صحبت کرده‌ایم می‌توان به‌جای ۰/۲، عدد ...۰/۱۹۹۹ را درنظر گرفت،

به‌این‌ترتیب، همهٔ مجموعهای جزئی پشت سرهم، بین ۰/۱و۰/۲ واقع‌اند، یعنی روی فاصله‌ای ازخط عددی، که در اینجا با خط‌کلفتر نشان داده شده است، قرار دارند:



هر نقطه از این فاصله را، می‌توان به عنوان تقریب اول، انتخاب کرد. اگر حالا، تنها تا رقمهای یکهزارم را در نظر بگیریم، معلوم می‌شودکه این مجموعهای جزئی، بین دوعدد

۰/۱۰۱ و ۰/۱۰۲

قرار گرفته‌اند. این فاصله را روی شکل، به‌سختی می‌توان نشان داد، زیرا این دونقطه، خیلی به هم نزدیکند و اختلاف بین آنها، تنها برابر با یکهزارم است . نقطه‌های واقع در این فاصله ، که به‌طورکامل در داخل فاصلهٔ قبلی قرار گرفته است، تقریب بهتری از عدد را به‌ما می‌دهند.

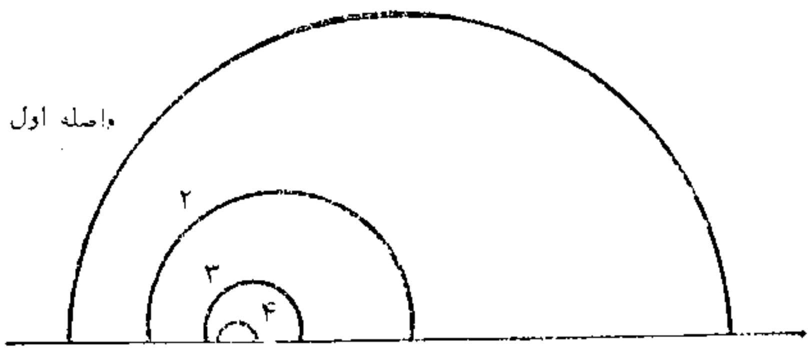
اگر همین استدلال را ادامه دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که همهٔ

مجموعهای جزئی را می‌توان مرتباً در فاصله‌هایی جاداد که یکی بعداز دیگری، تنگتر و با اندازه‌ای کوچکتر می‌شود:

بین ۰/۱۰۱۰۰۱ و ۰/۱۰۱۰۰۲

بین ۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱ و ۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۲

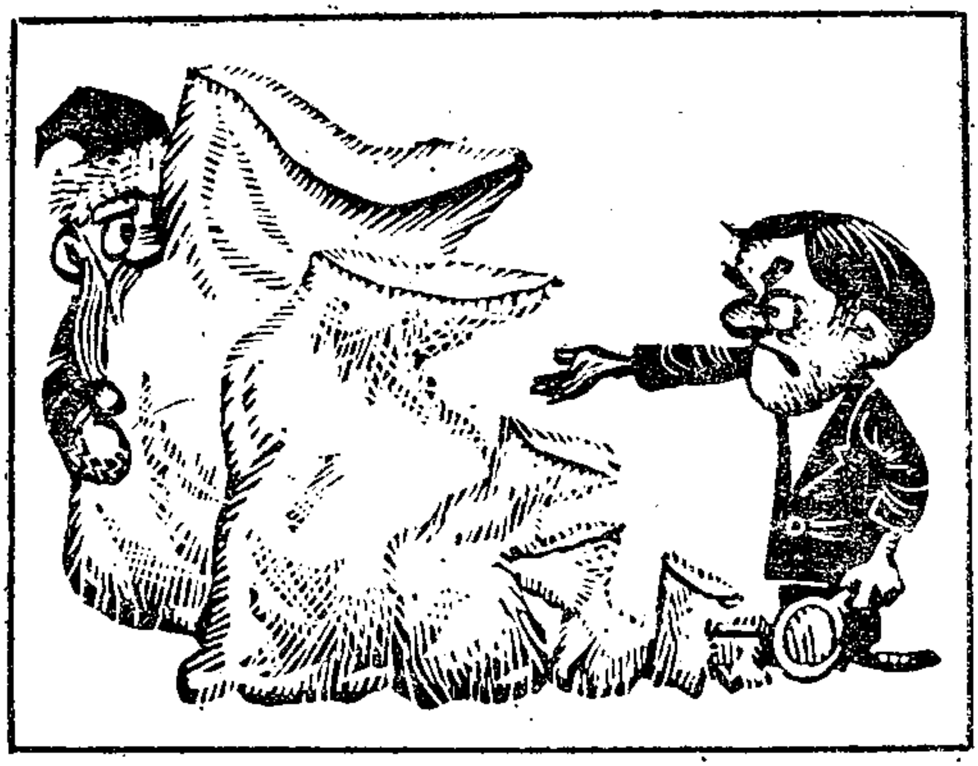
اگراین فاصله‌ها، به‌این سرعت کوچک نمی‌شد، می‌توانستیم، مثلاً شکلی به اینصورت داشته باشیم:



طول این فاصله‌ها، به ترتیب، چنین است:

۰/۱
۰/۰۰۱
۰/۰۰۰۰۰۱
۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱
....

یعنی یکدهم، یکهزارم، یك ملیونیم وغیره. روشن است این دنباله به سمت صفر میل می‌کند، یعنی آنقدر کوچك می‌شود که نه می‌توان آنرا روی شکل نشان داد ونه حتی می‌توان آنرا نام برد. به این ترتیب، مجموعهای جزئی ما، وقتی که تعداد جمله‌ها را به اندازهٔ کافی زیاد



بگیریم، درفاصله‌ای‌که به طور نامحدود کوچك می‌شود ، گیر می‌کند.

اینکه هرفاصله، درفاصلهٔ قبلی قرار دارد ، یك بـازی قدیمی را به نام هدیه‌های شوخی‌آمیز به یاد می‌آورد: به شما یـك بسته می‌دهند، شما لفاف آنرا باز می‌کنید، ولی زیر آن روپوش دیگری پیدا می‌شود. شما با کنجکاوی وعلاقه، بسته‌ها را پشت سرهم باز می‌کنید، ولی‌هربار با بسته‌ای که کوچکتر از بستهٔ قبلی است، روبرو می‌شوید.

در مثال ماهم، چنین وضعی بینهایت بارتکرار می‌شود. حددوم، بـه طور کامل در داخل حد اول قرار دارد، حدسوم، در داخل حداول و هم درداخل حد دوم واقع است، چهارمی در درون سه حداول واقع‌است وغیره. این‌مثالهابه‌ماتلقین می‌کندکه اگردنبالهٔ نامتناهی ازفاصله‌هایی را بسازیم، که‌هرکدام از آنها در درون همهٔ فاصله‌های قبلی قرارگرفته

باشد، در اینصورت چیزی یـا جایی کـه همهٔ این فاصله‌ها، به‌سمت آن میل می‌کنند، باید برای همهٔ آنها، مشترك باشد.

می‌توان ثابت کرد کـه در مورد همهٔ ایـن حدها، چیزی بیش از یك نقطهٔ مشترك نمی‌تواند وجود داشته باشد.

فرض کنیم که ما این نقطهٔ مشترك را پیدا کرده باشیم، و کسی در برابر ما بایستد و ادعاکندکه او نقطهٔ مشترك دیگری ، برای همهٔاین فاصله‌ها، که با نقطهٔ ما تفاوت دارد، ومثلاً در سمت راست نقطهٔما قرار دارد، پیدا کرده است. روشن است کـه این فرد نمی‌تواند ادعاکند کـه نقطهٔ او ، خیلی دور از نقطهٔ ما قرار گرفته است، ولی به خاطر اینکـه بتوانیم این دونقطه را به‌روشنی از هم جدا کنیم، آنها را به قدرکافی دورازهم می‌گیریم، استدلالی را که دراین مورد به‌کار می‌بریم، می‌توان برای هر پاره خط کوچکتری هم با موفقیت به کاربرد.



هرقدر که این دونقطه به هم‌نزدیك باشند، باز هم فاصلهٔ بین آنهابرابر باعدد مشخصی می‌شودکه‌ماآنرا دوهزارم واحد می‌گیریم؛ نبایدفراموش کرد که با دونقطهٔ متفاوت سروکار داریم! باایـن همه، طول فاصله‌ها، به سمت صفر میل می‌کند وبنابراین، دیر یازود، به فاصله‌ای می‌رسیم که طول آن کمتر از یکهزارم واحد باشد. نقطهٔ ما، در درون همهٔ فاصله‌ها قراردارد؛ حتی اگر این نقطه ، در انتهای چپ فاصله‌ای‌که طولش‌کمتر

از یکهزارم،است، واقع باشد، نقطهٔ سمت راست آن نمی‌تواند به‌نقطه‌ای که دوهزارم از نقطهٔما فاصله‌دارد، دسترسی پیداکند.



بنابراین، نقطه‌ای که به‌عنوان نقطهٔ دوم به ما داده شده است،در خارج این فاصله، وهمهٔ فاصله‌هایی که طول کوچکتر دارند، قرار می‌گیرد؛ یعنی،چنین نقطه‌ای‌نمی‌تواند، نقطهٔ مشترك همهٔ این فاصله‌هاباشد.

به‌این ترتیب، همهٔ فاصله‌ها، تنها یك نقطه مشترك دارند؛ وچون همهٔ مجموعهای جزئی عبارت ... ۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱ هرقدرکه جلو برویم،هرکدام در درون مجموعهای جزئی قبل قراردارد، بنابراین، این مجموعها، روی خط عددی به سمت یك نقطه، میل می‌کنند.

می‌بینیم که روی خط عددی، نقطه‌ای را کشف کردیم‌که متناظر با هیچکدام از عددهایی که تا حالا می‌شناختیم، نیست. با وجودی که خط عددی، به صورت انبوه، پوشیده ازکسرهاست، در این نقطه، هیچ کسری را نمی‌توان پیداکرد. وقتی که یك کسر را به صورت دهدهی خود تبدیل می‌کنیم، همیشه یك دورهٔ گردش پیدا می‌شود؛ در حالیکه‌در اینجا،کسردهدهی ما، یعنی ...۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱،که به سمت این نقطهٔ نزدیك می‌شود، متناوب نیست و دورهٔ گردشی ندارد. ولی در عین‌حال، نقطه‌ای‌کاملاً مشخص بدست آورده‌ایم که در فاصلهٔ کاملاً معینی از نقطهٔ صفر،قرارگرفته است. در حالیکه،این فاصله‌را،نه‌به‌یاری‌واحد،ونه به‌یاری قسمتهای‌کوچکترواحد، نمی‌توان‌اندازه‌گرفت. بنابراین،این‌پاره

خط، دست کم بنابر آگاهیهایی که تاکنون داریم-هیچ اندازه‌ای ندارد. برای اینکه این نقص را برطرف کنیم، می‌گوییم که اندازهٔ این پاره خط برابر است با عدد گنگ

$$۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰۱ \ldots$$

به این ترتیب، این «موجود» ناشناخته را، که معرف «چیز» کاملاً معینی است و مرتباً به عددهای گویای

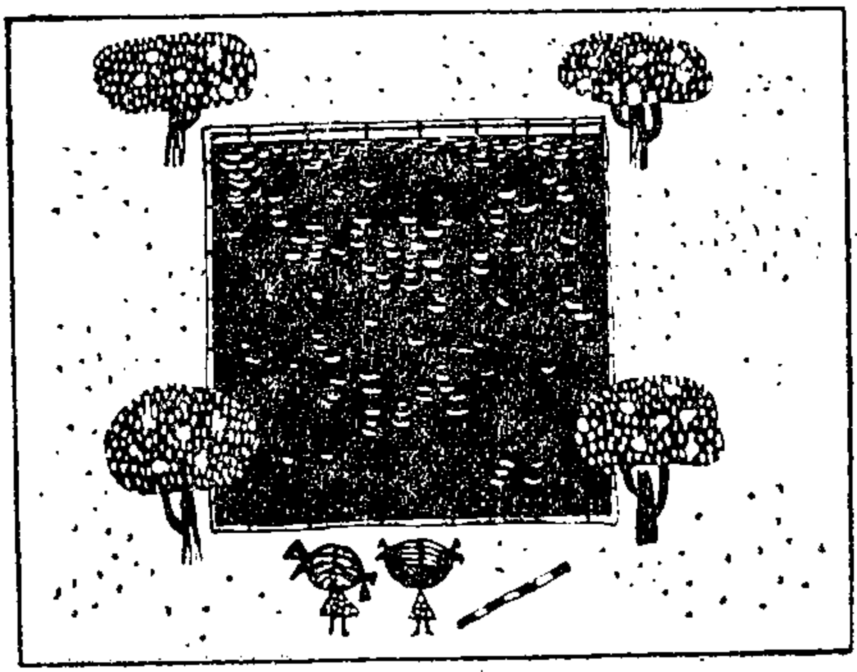
$$۰/۱؛ \quad ۰/۱۰۱؛ \quad ۰/۱۰۱۰۰۱؛ \ldots$$

نزدیك می‌شود، به‌عنوان یك عدد تازه، درنظر می‌گیریم. این عددجدید، چه برای مرد عمل وچه برای یك فیزیکدان، به همان اندازهٔ عدد $\ldots ۰/۴۴۴ = \frac{۴}{۹}$، سودمند است. وقتی که این‌عدد، به‌مقادیرگویا نزدیك می‌شود، می‌توانیم آنرا با هر دقتی که بخواهیم، در دسترس داشته باشیم.

درواقع، مااز همهٔ نشانه‌های‌دهدهی بسطاین عددآگاهیم وبسته‌به نیازی که داشته باشیم، می‌توانیم تعدادی ازآنها را اختیار کنیم؛زیرا در بارهٔ بسط آن، یك تصور کلی دردست داریم.

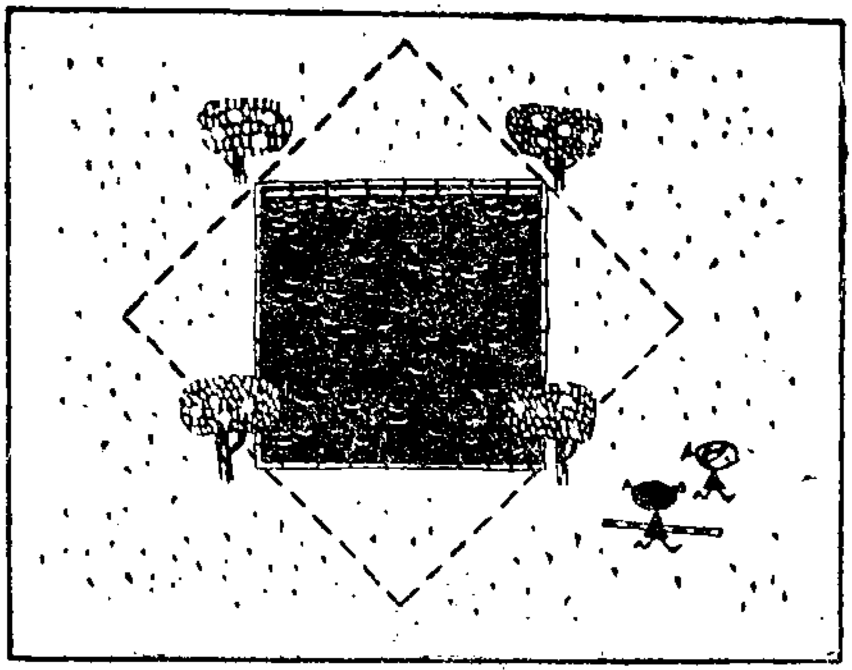
به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که هر بسط دهدهی غیر متناوب دیگری، که رقمهای آن بنابر قانون مشخصی نوشته می‌شود، متناظر با نقطهٔ معین دیگری با فاصلهٔ معینی از نقطهٔ صفر، روی محور عددهاست. ما، به اینگونه بسطهای نامتناهی به عنوان اندازه‌هایی که متناظر با فاصله هستند، نگاه می‌کنیم وآنها را عددهای گنگ می‌نامیم. ممکن است، این استدلال، خیلی انتزاعی و تجریدی به‌نظرآید، ولی «ا»،

دانش‌آموز چهارده سالهٔ من، راه‌حلی پیدا کرد و نشان داد که پاره‌خطهایی وجود دارد که اندازهٔ آنها را نمی‌توان به‌کمک عددهای درست و یا عددهای کسری نشان داد. او برای حل این مسأله، به نوعی شوخی متوسل شد. استخر مربع شکلی را، به وسیلهٔ چهار درخت، که در گوشه‌های آن کاشته شده است، تزیین کرده‌اند:

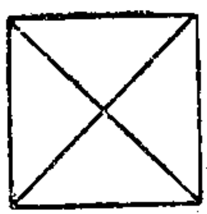


می خواهیم استخر را وسیع‌تر کنیم، به نحوی که مساحت آن دو برابر شود: ضمناً شکل آن باز هم مربع باشد و درختها هم درجای خودشان باقی بمانند.

در واقع، مساحت مربع بزرگتر، دو برابر مساحت مربع کوچکتر است. برای اینکه، این حقیقت را ببینیم، ابتدا قطرهای مربع کوچکتر را رسم می کنیم.



حالا به سادگی معلوم می‌شود که برای بدست آوردن مربع بزرگتر، باید چهارمثلثی را که ضمن رسم قطرها پیدا شده‌است، به‌طرف بیرون «برگردانیم.»



به‌این ترتیب به‌مساحت مربع کوچکتر، درست به‌اندازهٔ مساحتی که دارد، اضافه می‌شود، یعنی مساحت مربع بزرگتر، دو برابر مساحت مربع کوچکتر می‌شود.

ولی، «او» در همین جا متوقف نشد. او می‌خواست بداند، که اگر طول ضلع استخر اول برابر ۱ کیلومتر باشد، طول ضلع استخر تازه چقدر است. مساحت استخر قبلی برابر با ۱ × ۱، یعنی ۱ کیلو مترمربع، می‌شود؛ مساحت استخر جدید، دو برابر مساحت استخر قبلی است، یعنی مساحت استخر جدید برابر ۲ کیلو مترمربع خواهد شد.

حالا، ما به عملی رسیده‌ایم که عکس عمل به توان رساندن‌است، یعنی باید ریشهٔ یك عدد رابدست آوریم. مسأله به اینجا می‌رسد که باید $\sqrt{۲}$ را محاسبه کنیم،زیرا عددی راکه‌توان دوم آن برابر با ۲ باشد ـ اگر چنین عددی وجود داشته باشد ـ با نشانهٔ $\sqrt{۲}$ مشخص می‌کنیم.

\او آغازبه محاسبه کرد. ضلع مربع کوچکتر، طولی برابر۱کیلو متر دارد، روشن است که ضلع مربع بزرگتر باید طولی بزرگتر از ۱ کیلومتر داشته باشد ، ولی ضلع استخر بزرگ نمی‌تواند طولی برابر ۲ کیلومتر داشته باشد، زیرا در اینصورت مساحت آن برابر با ۲×۲ ، یعنی ۴کیلو متر مربع می‌شود. بنابراین طول مورد نظر، عددی است بین ۱ و ۲ .

\او به‌جستجوی عددی پرداخت که چنددهم ازعدد ۱ بیشتر باشد. او کشف کرد:

$$۱/۴^۲ = ۱/۴ \times ۱/۴ = ۱/۹۶; \qquad ۱/۵^۲ = ۱/۵ \times ۱/۵ = ۲/۲۵$$

عدد ۱/۹۶ کوچکتر و عدد ۲/۲۵ بزرگتر از عدد ۲ـ عدد مساحت استخر بزرگتر ـ درآمدند. بنابراین، عدد مورد نظر ، بین دوعدد

۱/۴ و ۱/۵

قرار دارد. \او از کارباز نایستاد وباجستجو به سراغ رقم سدگان این عدد رفت . او به این نتیجه رسید که طول مورد نظرش بین دوعدد ۱/۴۱ و ۱/۴۲ واقع است.

هرچه که \او ، به‌همین ترتیب جلوتر وجلوتر رفت، بیشتر متقاعد

شد که نمی‌تواند عددی را پیداکند که توان دوم آن برابر ۲ باشد. ولی «او» اطمینان داشت که: «چنین عددی وجوددارد؛ ضلع مربع بزرگتر، یك چیز کاملاً واقعی است ومی‌توان آنرا ساخت!»

نتیجه‌گیری «او» کاملاً درست بود: عددگویایی وجودندارد که مجذور آن برابر با ۲ باشد. «او» ثابت کرد که این عدد، درست نیست، زیرا اوکشف کرد، که چنین عددی باید بین ۱ و ۲ باشد؛ وبین ۱ و ۲ هم، هیچ عدد درستی وجود ندارد. تنها این می‌ماند که کسرهای بین ۱ و ۲ را جستجو کنیم.

ابتدا باید این کسررا تاحدامکان ساده کرد، تا جایی که به یك کسرساده نشدنی برسیم. دراینصورت روشن است که مخرج چنین کسری نمی‌تواند برابر۱ باشد، زیرا مثلاً کسر $\frac{۳}{۱}$ به معنای عدد درست ۳ استو بین ۱ و ۲ هم عدد درستی وجود ندارد. اگر کسری را نتوان ساده‌کرد، مربع آنرا هم نمی‌توان ساده کرد، زیرا مثلاً داریم:

$$\left(\frac{۱۵}{۱۴}\right)^{۲}=\frac{۱۵\times۱۵}{۱۴\times۱۴}$$

وکسر $\frac{۱۵}{۱۴}$ را هم نمی‌توان ساده کرد، زیرا

$$۱۵=۳\times۵ \qquad و \qquad ۱۴=۲\times۷$$

به زبان دیگر،دو عدد ۱۵ و ۱۴، هیچ عامل اول مشترکی ندارند. وقتی که هرکدام ازاین عددها را درخودش ضرب کنیم، باز هم‌نمی‌تواندعامل اول مشترکی بین آنها پیدا شود:

$$\left(\frac{۳\times۵}{۲\times۷}\right)^{۲}=\frac{۳\times۵\times۳\times۵}{۲\times۷\times۲\times۷}$$

وبنابراین، هیچ گفتگویی از ساده شدن‌آن نمی‌شود کرد. ولی، وقتی که یك کسر نه قابل ساده شدن باشد، و نه مخرجی برابر ۱ داشته باشد، نمی‌تواند برابر با ۲ باشد.

کوششی که‌او کرد، چیزی جز این نبود که‌با پیدا کردن‌رقمهای دهدهی عدد $\sqrt{۲}$، مرتباً، فاصله‌ای را که شامل این عدد است، تنگتر می‌کرد. دردستگاه عدد شماری دهدهی، هرعددی که بین۱و ۲ واقع باشد همیشه با

۱/۰۰۰

آغازمی‌شود. بنابراین، عدد ۱ را می‌توان نخستین‌تقریب عدد $\sqrt{۲}$دانست. ولی، از آنجا که می‌دانیم، این عدد بین ۱/۴ و ۱/۵ قرار گرفته‌است، می‌توانیم بازهم یك رقم دیگر از بسط دهدهی آنرا بنویسیم:

۱/۴۰۰۰

و این، تقریب بهتری از عدد $\sqrt{۲}$ را می‌دهد. وقتی که می‌دانیم، این عدد بین ۱/۴۱ و ۱/۴۲واقع است ، می‌توانیم رقم بعدی بسط دهدهی آنرا هم بنویسیم:

۱/۴۱۰۰۰

حالا بایدفاصلهٔ بین ۱/۴۱ و ۱/۴۲ را به قسمتهایی که شامل رقم‌هزارم باشد، تقسیم کنیم و معلوم کنیم که از عددهای

۱/۴۱۰ ، ۱/۴۱۱ ، ۱/۴۱۲ ، ۱/۴۱۳ ، ۱/۴۱۴ و ۱/۴۱۵

۱/۴۱۶ ، ۱/۴۱۷ ، ۱/۴۱۸ ، ۱/۴۱۹

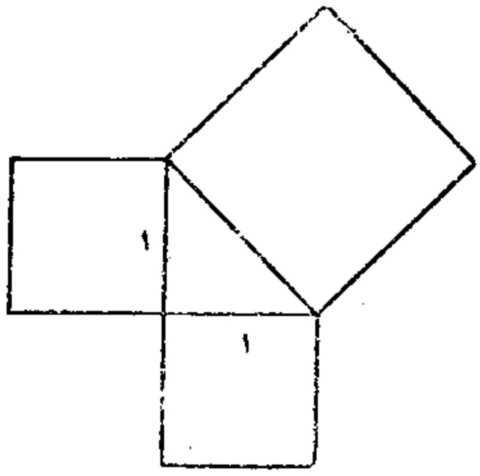
کدامیك‌دارای این ویژگی هستند که مجذور آن از ۲ کوچکتر ومجذور عدد بعدی‌آن از ۲ بزرگتر باشد. این‌دو عدد «غلافی» را تشکیل می‌دهند که عدد $\sqrt{۲}$ در درون آن قرار گرفته است وضمناً طول آن برابر است با یك هزارم. بـه این ترتیب، رقم هزارم هم در بسط دهـدهی عدد $\sqrt{۲}$، بدست می‌آید.

البته، یك روش مکانیکی هم برای محاسبهٔ رقمهای دهدهی عدد $\sqrt{۲}$ وجود دارد ، ولی‌خوبی روش ما دراینست‌که به‌تدریج، فاصله‌ای را که عدد $\sqrt{۲}$ در آن قرار دارد، تنگتر می‌کنیم.

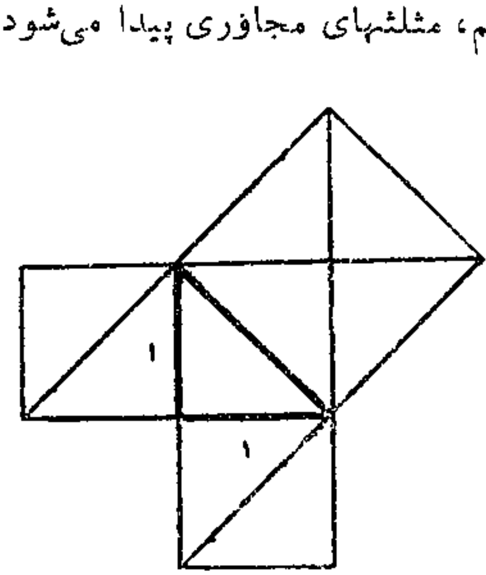
این روش را تا هرکجا که بخواهیم، می‌توان ادامه داد وپشت‌سر هم، تقریبهای‌بهتری، برای بیان عدد $\sqrt{۲}$ پیداکرد. و ما می‌دانیم که این عمل هرگز تمام نمی‌شود وهرگزبه یك کسر مشخص نمی‌رسیم، زیراعدد $\sqrt{۲}$ نمی‌تواند، عددی گویـا باشد. ولی، بـا این روش می‌توانیم مقدار این عدد را، با پیدا کردن تقریبهای بهتر، هرچه دقیقتر و قابل عمل‌تر، پیش خود مجسم کنیم؛ و این طول ضلع مربعی است کـه مساحت آن دو برابر مساحت استخرماست.

قضیهٔ فیثاغورث

از طریق قضیهٔ معروف فیثاغورث هم می‌توان با عدد $\sqrt{۲}$ آشنا شد . مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که هرکدام از ضلعهای پهلوی زاویهٔ قائمهٔ آن، برابر با واحد باشد، و سپس روی هر کدام ازضلعهای آن، مربعی می‌سازیم:



اگر درهرکدام از مربعهای کوچکتر، یکی ازقطرها، و در مربع بزرگتر، دو قطر را رسم کنیم، مثلثهای مجاوری پیدا می‌شود که دو به دوباهم برابرند:



دو مربع کوچکتر ، رویهم شامل ۴ مثلث‌اند ومربع بزرگترهم، از همین۴ مثلث درست شده است. بنابراین، مجموع‌مساحتهای‌دومربع کوچکتر، با مساحت مربع بزرگتر، برابر می‌شود. از آنجا که مساحت مربع، بامجذور کردن ضلع آن بدست می‌آید، می‌توانیم بگوییم که مجموع دو مربعی‌که روی ضلعهای پهلوی زاویهٔ قائمه ساخته شده‌اند، یامجموع‌مجذورهای‌دوضلع پهلوی زاویهٔ قائمه،برابراست‌بامجذوروتر. (این حکم نه تنها برای این مثلث، بلکه برای هرمثلث قائم‌الزاویهٔ دلخواهی درست است، منتهی اثبات آن درحالت کلی ، کمی پیچیده‌تر

است.) مجموع مجذورهای دوضلع پهلوی زاویهٔ قائمه برابر است با

$$۱^۲+۱^۲=۱+۱=۲$$

واین باید برابر با مجذوروتر باشد ، یعنی طول وتر برابر است بـا $\sqrt{۲}$.

می‌توان ثابت کرد که به جای عمل با عددهای گنگ، می‌شوداز از مقادیر تقریبی‌آنها استفاده کرد. مقادیر تقریبی، عددهایی گویاهستند و برای آنها، همان قانونهای قبلی محاسبه، قابل اجراست. و در ایـن حالت، نامتناهی، قانونی راکه‌درحالت متناهی‌درست است، رد نمی کند.

حالا می‌توانیم‌به مسأله‌ای‌توجه کنیم که پیش‌از این نمی‌توانستیم به‌آن پاسخ دهیم: آیا همیشه می‌توان طول ضلع مربـع یاطول ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه را، برحسب سانتیمتر و قسمتهای کـوچکتر سانتیمتر بیان کرد؟ به این پرسش باید پاسخ داد: نه‌همیشه، زیرا، پاره خطهایی وجود دارد که نمی توان طول آنها را، حتی با هیچ جزئی از سانتیمتر، اندازه گرفت. وقتی که مثلاً $\frac{۱}{۲۵}$ سانتیمتر ۳۱ بار بر یك پاره خط قرار گیرد، طول این پاره خط برابر با $\frac{۳۱}{۲۵}$ سانتیمتر می‌شود. ولی، ما به ایـن نتیجه‌رسیدیم که اگرهرضلع پهلوی زاویهٔ قائمه درمثلث قائم‌الزاویه‌ای، برابر با ۱ سانتیمتر باشد، طول‌وتر آن برحسب سانتیمتر ، نمی تواند به وسیلهٔ یك عددگویابیان شود، (باید توجه کرد که گفتگو برسراندازه‌گیری این طول برحسب واحد انتخابی ماست؛ ولی عدد $\sqrt{۲}$ هم متناظر با طول معینی است و می‌توان آنرا به‌عنوان واحد طول انتخاب کـرد؛ در چنین صورتی، این پاره خط هم قابل اندازه گیری خواهد بود.)

ما توانستیم نشان بدهیم که، با استفاده از مقادیر تقریبی گویـا، با همان دقت فوق‌العاده‌ای که در مثال مـربوط بـه شکلات، بـه نتیجه رسیدیم، دراینجا هم‌قانونهای‌مربوط‌به محاسبهٔ مساحت، وحجم‌به قوت

خود باقی هستند.

وقتی که دربارهٔ معادله‌های درجه دوم صحبت می کردیم، این معادله برایمان غیر قابل حل، باقی ماند:

$$(x+۳)^۲=۲$$

حالا می توانیم این معادله را هم حل کنیم. از آنجا که با عددهای منفی هم سروکارداریم وضمناً می‌دانیم که توان دوم یك عدد، چه مثبت باشد وچه منفی، یك عدد مثبت می‌شود، می‌توانیم هم $+\sqrt{۲}$ وهم $-\sqrt{۲}$ را، به عنوان عددی در نظر بگیریم که توان دوم آن برابر با ۲ باشد. به این ترتیب داریم:

$$x+۳=+\sqrt{۲} \quad \text{یا} \quad x+۳=-\sqrt{۲}$$

که اگرازدو طرف تساوی عدد۳ راکم کنیم، دوجواب بدست‌می‌آوریم:

$$x=-۳+\sqrt{۲} \quad \text{یا} \quad x=-۳-\sqrt{۲}$$

عددهای منفی، دشواری‌تازه‌ای به‌وجود می‌آورند. اگربخواهیم این معادله را حل کنیم:

$$x^۲=-۹$$

معلوم نیست که از چه جهتی باید به‌آن نزدیك شویم، زیرا چه مجذور ۳+ وچه مجذور ۳ − ، برابر با ۹+ می‌شود. ما عددی را نمی‌شناسیم که مجذورآن‌برابر با ۹− باشد. واین‌چیزی‌است که‌ما بازهم، دربارهٔ آن، گفتگو خواهیم کرد.

قوت مجموعهٔ عددهای حقیقی

به وجود عددهای گنگ، از آنجا پی‌بردیم که روی محورعددها، رخنه‌ها وشکافهایی کشف کردیم؛ جاهای خالی را پیداکردیم که نقطه‌های آنها، متناظر با هیچکدام از عددهایی که می‌شناختیم، نبود. عددهای گویا وعددهای گنگ را رویهم، عددهای حقیقی می‌نامند (وما هم اکنون به عددهایی برخوردیم که از حقیقی بودن، به دور بودند)؛و اینها دیگر تمام محور عددها را پرمی‌کنند. درواقع، اگر نقطه‌ای روی محورعددها انتخاب کنیم؛ این نقطه، بین دو عدد درست کاملاً معین قرار می‌گیرد، بعدبین دوقسمت کاملاً معین دهگانها ، سپس بین دوقسمت کاملاً معین سدگانها واقع می‌شود وغیره، درست به همان ترتیب که شاگرد من ۱۰۱ در مورد عدد $\sqrt{2}$ ، جستجو کرد. بـه این ترتیب، رقمهای بسط دهدهی آن، پشت سرهم بدست می‌آید. اگر این بسط، جایی به‌پایان رسید(یعنی نقطه بریك‌مقدار درست، یا بر یکی ازدهگانها، یا سدگانها وغیره منطبق شد) و یا به‌صورت دوره‌ای درآمد، دراینصورت، نقطهٔما متناظر با یـك عدد گویاست. ولی، اگریکی از این حالتها، پیش نیامد، در اینصورت، این نقطه، معرف یك عدد گنگ است.

مثلاً، اگر بخواهیم بااین روش، به‌نقطهٔنظیرعدد $1\frac{1}{9}$ برسیم ـ عددی که از «مثال شکلات» با آن آشنا هستیم ـ معلوم می‌شود که این عددبه ترتیب بین ۱ و ۲؛ بین ۱/۱ و ۱/۲، بین ۱/۱۱ و ۱/۱۲، بین ۱/۱۱۱ و ۱/۱۱۲ و غیره، قرار گرفته است؛ به ترتیب، تقریبهای

۱؛ ۱/۱؛ ۱/۱۱؛ ۱/۱۱۱؛...

پشت سرهم در داخل این پاره خطهایی که مرتباً کوتاهتر می‌شوند،قرار می‌گیرد (ودقیقاً بر نقطهٔ چپ این پاره خطها). بـه همین مناسبت، ایـن

عددها به ترتیب، تقریب بهتری از عدد $\frac{1}{9}$۱ را بدست می‌دهند و دائماً به آن نزدیکتر می‌شوند. روشن است که اینها، یك بسط دوره‌ای را تشکیل داده‌اند، زیرا عدد $\frac{1}{9}$۱ ، یك عدد گویاست.

آیا تعداد عددهای گنگ روی محور عددها، زیاداست؟

باوجودی که ما، به صورت نوعی تصادف با اینگونه عددها برخورد کردیم، روشن است که تعداد آنها خیلی زیاد است. گاهی این احساس به‌وجود می‌آید که در بسط دهدهی، به تصادف و اتفاق، ممکن است به حالت دوره‌ای برسیم. ولی، گاهی هم به نظر می‌رسد که ممکن است این احساس، گول زننده باشد. به‌یاد بیاوریم که ما گمان می‌کردیم، تعداد عددهای گویا بیشتر از تعداد عددهای طبیعی است. در حالیکه در عمل معلوم شد که همهٔ عددهای گویا را می‌توان به صورت یك دنباله، ردیف کرد، به نحوی که هرعدد گویا، بدون استثنا، متناظر با یك عدد طبیعی باشد: جملهٔ اول این دنباله متناظر با ۱ ، جملهٔ دوم آن متناظر با ۲ وغیره. اگر بخواهیم همین عمل را با عددهای گنگ بکنیم، چه پیش می‌آید؟

ابتدا، مجموعهٔ عددهای گویا وگنگ، یعنی مجموعهٔ عددهای حقیقی را در نظر می‌گیریم. عددها را، به‌شکل دهدهی آنها در نظر می‌گیریم. ضمناً، خود را به عددهای بین ۰ و ۱، یعنی عددهایی که مقدار درست آنها ۰ است، محدود می‌کنیم؛ وبنابراین لزومی ندارد به مقدار درست آنها توجه کنیم. خواهیم دیدکه حتی این جزء ازمجموعهٔ‌عددهای حقیقی، قوتی بیشتر از قوت مجموعهٔ عددهای طبیعی دارد. نمی‌شود، همهٔ عددهای حقیقی بین ۰ و ۱ را، بدون اینکه حتی یکی از آنها به حساب نیاید، به صورت یك دنباله نوشت.

فرض می‌کنیم که کسی ادعا کند که حق با مانیست واوتـوانسته است مثالی پیداکند که نظر ما را رد می‌کند. بدین معنی که حریف ما، دنباله‌ای از عددهای حقیقی بارقم درست صفر، تشکیل داده باشد وضمناً تأکید کند که حتی یکی ازعددها هم، خارج از این دنباله نیستند. حتی بالاترازاین، حریف‌ما، این دنباله را روی کاغذ بیاورد. روشن است‌که اوباید برای نوشتن هر عدد، قانونی را درنظر بگیرد وتعدادی ازرقمهای آنرابنویسد، منتهی، این قانون اجازه بدهد که هروقت لازم باشد،بتوان رقمهای عدد را تا هرجای دلخواه، ادامه داد. یك عدد گنگ را تنها به همین‌ترتیب‌می‌توان‌معین‌کرد، زیرا عددگنگ، به‌صورت‌یك‌کسرنامتناهی دهدهی درمی‌آید. دنباله ممکن است، مثلاً بـه این ترتیب، آغـاز شده باشد:

عدد نخست	۰/۱
عدد دوم	...۰/۲۰۲۰۲۰
عدد سوم	...۰/۳۱۱۳۱۱۱۳۱۱۱۱۳
. . . .	. . . .

وبخواهند ما را قانع کنند که این عددها را می‌توان به نحوی، و طبق قانونی، طوری ادامه دادکه هر عدد حقیقی، دیر یا زود، در آن پیداشود وهیچ عدد حقیقی، بیرون از آن باقی نماند.

قانون نوشتن این دنبالهٔ عددها، هرچه باشد، می‌توان ثابت کـرد که دست کم یك عدد حقیقی وجود دارد که با مقدار درست ۰ آغازشده است ودر این دنباله جانگرفته است.

ابتدا، همهٔ عددهایی را، کـه در این دنباله بـه صورت کسرهای دهدهی متناهی نوشته شده‌اند، به شکل نامتناهی خود تبدیـل می‌کنیم.

برای این منظور، می‌توان به‌تعداد نامتناهی ۰ را به دنبال آن قرار داد. در اینصورت داریم:

عدد نخست	۰/۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰...
عدد دوم	۰/۲۰۲۰۲۰۲۰۲۰۲۰۲...
عدد سوم	۰/۳۱۱۳۱۱۱۳۱۱۱۱۳...

وحالا، طرح عمل خود را می‌ریزیم. روشن است که مقدار درست عددما، برابر است با

۰/...

به جای یکدهم (رقم اول بعد ازممیز) چه رقمی بگذاریم؟ به‌عددنخست در دنباله‌ای که تشکیل داده‌ایم، نگاه کنیم وببینیم که در جای یکدهم آن، چه رقمی وجود دارد؛ آنرا به‌رقم دیگری (غیراز ۰ و ۹) تغییرمی‌دهیم وبه جای رقم یکدهم، در عددی که می‌خواهیم درست کنیم، می‌گذاریم. در مثال‌ما، رقم اول بعد از ممیز در عدد نخست برابر است با ۱ ؛ ما به جای آن درعدد مورد نظر خود، رقم ۲ را می‌گذاریم (می‌توانستیم در اینجا ویا درهر مورد بعدی، یکی از رقمهای۳، ۴، ۵، ۶، ۷ یا ۸ رابگذاریم) . اگر، مثلاً در جای رقم بعد از ممیز در عدد نخست، رقمی به جز ۱ قرار داشت، ما در عدد خود، همان ۱ را قرار می‌دادیم (به این ترتیب،در هرمورد، رقم ۱ را به یکی‌ازرقمهای ۲،۳، ...، ۸وبرعکس، هر کدام از رقمهای اخیر را به‌رقم ۱ تبدیل می کنیم). بنابراین، عدد مورد نظر ما، به‌این صورت درمی‌آید:

۰/۲۰۰...

برای اینکه رقم دوم‌بعد از ممیز (رقم یکصدمها) را معین کنیم، به‌رقمی که در همین مکان، در عدد دوم ما قرار گرفته است، نگاه می‌کنیم: باز هم عددی غیر از آن، به‌جز ۰ و ۹ ، را انتخاب می‌کنیم. برای سهولت کار، تنها از رقمهای ۱ و ۲ استفاده می‌کنیم . در جای یکصدمها ، در عدد دوم دنبالهٔ ما، رقم ۰ قرار دارد (و نه ۱)؛ بنابراین، در عدد مورد نظر خود، به جای یکصدمها، رقم ۱ را می‌گذاریم (اگر در عدد دوم دنباله، در این مکان، رقم ۱ وجود داشت، ما در عدد مورد نظر خود، رقم ۲ را می‌گذاشتیم). بنابراین، عدد ما به اینصورت درمی‌آید:

۰/۲۱...

رقمهای بعدی را هم، به همین ترتیب می‌سازیم. به جای رقم سوم بعد از ممیز، ۲ را می‌گذاریم، زیرا در عدد سوم، در جای یکهزارمها، رقم ۱ قرار دارد. به این ترتیب، عددما، در بیان دهدهی خود، تا سه رقم بعد از ممیز، چنین می‌شود:

۰/۲۱۲...

ودیگر هرکس می‌تواند، رقمهای بعدی‌آنرا، تاهرجاکه بخواهد،بنویسد. اگر،عددهای دنبالهٔ ما،طبق قانونی، یکی پس‌ازدیگری،نوشته شده‌باشد، مثلاً می‌توانیم بدون هیچ اشکالی رقمهای این عدد مورد نظر را هم، پشت سر هم بنویسیم.

به این ترتیب، عددی بدست می‌آوریم که به‌صورت کسردهدهی نامتناهی است وبا مقدار درست برابر ۰ ، آغاز شده است؛ این عدد، بدون تردید، در دنباله‌ای که از عددهای حقیقی درست شده بود، وجود

ندارد: این عدد، باعدد نخست دنباله فرق دارد،زیرا دست‌کم، رقم‌اول بعد از ممیز در آنها، با یکدیگر متفاوت است؛ همچنین این عدد باعدد دوم دنباله‌هم متفاوت است، زیرا دست‌کم دررقم دوم بعد ازممیز باهم فرق دارند و غیره. در نتیجه، ایـن عدد، با هرکدام از عـددهای دنبالهٔ مفروض، دست کم، به خاطر یکی از رقمها، متفاوت است.

واینهم‌نمی‌شودکه‌این‌عدد،ازلحاظ‌شکل،باهرکدام‌ازعددهای‌دنباله، متفاوت باشد، ولی از لحاظ مقدار، بـا یکی از آنها برابر بـاشد. تنها موردی که می‌توان یك عدد را به دوشکل مختلف نـوشت، وقتی است که‌درعددی‌ازجای معینی به بعد،تنها صفر، ویا تنها ۹،تکرار شده باشد. وما می‌دانیم که عدد ما، تنها از رقمهای ۱ و ۲ درست شده است.

به این ترتیب، به محض اینکه راهی پیدا کنیم‌تا عددهای حقیقی را در دنبالهٔ واحدی ردیف کنیم، یعنی، عددهای حقیقی را در تناظریك به یك با عددهای طبیعی ۱،۲،۳،۴،۵، ... قرار دهیم، بلافاصله ، معلوم می‌شود عددی وجود دارد کـه در خارج این دنباله قرار گـرفته است. بنابراین، قوت مجموعهٔ‌عددهای حقیقی، بالاتر ازقوت مجموعهٔ عددهای طبیعی است. وروشن است که اگر خود را در دایرهٔ عددهای حقیقی بـا مقدار درست° محدود نکنیم ، بدون تردید ایـن حکم درستی خود را از دست نمی‌دهد.

ما، در اینجا، مجموعهٔ عددهای گویا وگنگ را، بـا هم در نظر گرفتیم. در مورد عددهای گویا ، می‌دانیم که آنها یك مجموعهٔ شمارا تشکیل می‌دهند، یعنی آنها را می‌توان در یك دنباله، ردیف کرد. اگر موفق می‌شدیم که‌عددهای گنگ را هم دریك دنباله، ردیف‌کنیم،آنوقت به سادگی می‌توانستیم با انتخاب متوالی یك عضو ازهر دنباله، این دو

دنباله را، به‌صورت یك دنبالهٔ واحد درآوریم. همانطور که دو دنبالهٔ عددهای مثبت وعددهای منفی:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...

-۱، -۲، -۳، -۴، -۵، ...

را می‌توان در یك دنبالهٔ واحد جاداد ومثلاً به اینصورت‌نوشت:

۱، -۱، ۲، -۲، ۳، -۳، ۴، -۴، ۵، -۵، ...

یکی کردن دودنبالهٔ عددهای گویا وعددهای گنگ، همان دنبالهٔ عددهای حقیقی می‌شودکه‌ما هم اکنون، عدم وجود آنرا ثابت کردیم. بنابراین، عددهای گنگ را هم نمی‌شود در دنباله‌ای ردیف کرد که شامل همهٔاین عددها باشد، ودرنتیجه، مجموعهٔ عددهای گنگ هم، مجموعه‌ای شمارا نیست، قوت مجموعهٔ عددهای گنگ، بیشتر از قوت مجموعهٔ عددهای گویاست.

به این ترتیب، داخل کردن عددهای گنگ، به معنای سادهٔپر کردن بعضی شکافها درمجموعهٔ فشردهٔ عددهای گویانیست. برعکس، عددهای گنگ، روی محور عددها، به صورت پیوسته. پراکنده‌اند، وعددهای گویا، با همهٔ تراکمی که‌دارند،درمیان مجموعهٔهمهٔ عددها، آنقدرهاهم فراوان‌نیستند. این وضع را می‌توان بااتر خیالی مقایسه کرد که زمانی تصور می‌کردند باید همهٔ جاهای خالی را در جو زمین پرکرده باشد؛ در اینصورت می‌شد گفت که ملکولهای هوا، که در همه جا حاضر هستند، تنها در اتر «پاشیده» شده‌اند.

۱۳. «منحنیهای حرارتی»، هموار می‌شوند

برای اینکه بدهی خودم را به بخش قبلی بپردازم، باید به تنها واحدی که در رأس مثلث پاسکال قرار دادم، برگردم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & ۱ & & & \\ & & ۱ & & ۱ & & \\ & ۱ & & ۲ & & ۱ & \\ ۱ & & ۳ & & ۳ & & ۱ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

ما به موقع خود، کشف کردیم که با آغاز از سطر دوم، مجموع عددهایی که در هر سطر قرار دارد، به ترتیب برابر است با

$$۲^{۱}, ۲^{۲}, ۲^{۳}, \ldots$$

اگربخواهیم عدد ۱ را، که پیش از همهٔ اینها ودربالای مثلث قراردارد، به این ردیف اضافه کنیم، ناچار باید مقدار $۲^{۰}$ رابرای آن در نظربگیریم. ولی ما تا حال، معنایی برای $۲^{۰}$ نمی‌شناسیم؛ ودر واقع، مگرمی‌شود تعداد عددهای ۲ را که در هم ضرب می‌شود، برابر ۰ گرفت! بله، ماتا اینجا به موردی برخورد نکردیم که لازم باشد به چنین عددی، معنایی بدهیم.

دوباره، به مفهوم توان برمی‌گردیم. ضرب دو توان از یك عدد را به یاد بیاوریم، روش کار خیلی ساده بود: کافی است که نماها رابا هم جمع کنیم. مثلاً

$$۳^{۲}\times ۳^{۴}=\underline{۳\times ۳}\times\underline{۳\times ۳\times ۳\times ۳}=۳^{۶} \text{ و } ۶=۲+۴$$

در مورد عمل دیگر، یعنی تقسیم هم ، کار به همین سادگی بود، البته به شرطی که باز هم با دوتوان از یك عدد، سروکار داشته باشیم:

$$\frac{۳^۶}{۳^۲}\times\frac{۳\times۳\times۳\times۳\times۳\times۳}{۳\times۳}$$

اگر صورت ومخرج را به ۳×۳ ساده کنیم، بدست می‌آید:

$$\frac{۳\times۳\times۳\times۳}{۱}=۳\times۳\times۳\times۳=۳^۴$$

وبنابراین

$$\frac{۳^۶}{۳^۲}=۳^۴ \quad و \quad ۴=۶-۲$$

یعنی، برای تقسیم هم می‌توان نماها را از هم کم کرد. بالاخره

$$(۳^۲)^۴=۳^۲\times۳^۲\times۳^۲\times۳^۲=\underline{۳\times۳}\times\underline{۳\times۳}\times\underline{۳\times۳}\times\underline{۳\times۳}=$$
$$=۳^۸ \quad و \quad ۸=۲\times۴$$

یعنی، اگر بخواهیم توانی را به توان جدیدی برسانیم ، کافی است بـه طور ساده، نماها را در هم ضرب کنیم.

جدولهای لگاریتم

بـا آغاز این نقطه، جدولی بـرای‌توانهای یـك عـدد تشکیل می‌دهیم. به عنوان پایه، مثلاً عدد ۲ را در نظر می‌گیریم. تـوانهای پشت سرهم عدد ۲، به سادگی بدست می‌آید:

$۲^{۱}=۲$،	$۲^{۷}=۱۲۸$،
$۲^{۲}=۴$،	$۲^{۸}=۲۵۶$،
$۲^{۳}=۸$،	$۲^{۹}=۵۱۲$،
$۲^{۴}=۱۶$،	$۲^{۱۰}=۱۰۲۴$،
$۲^{۵}=۳۲$،	$۲^{۱۱}=۲۰۴۸$،
$۲^{۶}=۶۴$،	$۲^{۱۲}=۴۰۹۶$

اگر بخواهیم دوتا از عددهای این جدول را در هم ضرب کنیم، به سادگی می‌توانیم نتیجه را از جدول بدست آوریم. مثلا ضرب

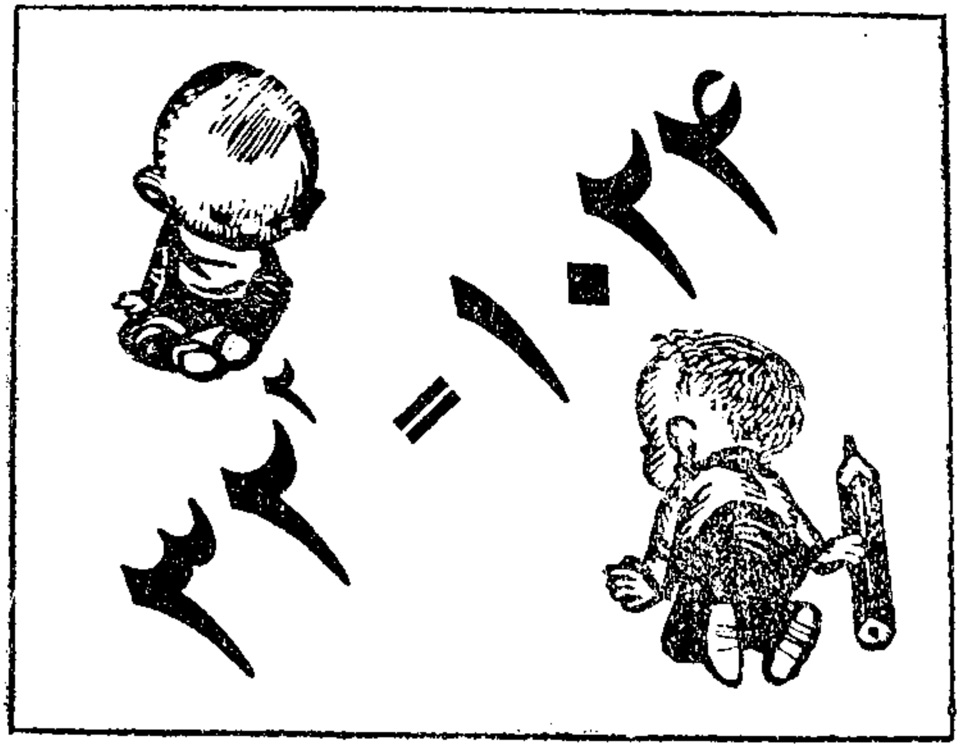
$$۶۴ \times ۳۲$$

را در نظر می‌گیریم؛ هر دوعدد، در جدول وجود دارند ونماهای متناظر آنها به ترتیب برابر ۶و۵ است، این دو نما را باهم جمع می‌کنیم ـ که عملی ساده‌ترازضرب‌است ـ به‌عدد ۱۱ می‌رسیم. حالا، کافی است به‌سطر یازدهم جدول مراجعه کنیم ـ که توان یازدهم را داده است ـ و نتیجه را ببینیم:

$$۲۰۴۸$$

حالا، فرض‌کنیم که بخواهیم توان دوم۳۲راپیداکنیم. $۲^{۵}=۳۲$ ،یعنی نمای متناظر آن برابر است با ۵؛آنرا در ۲ ضرب می‌کنیم، به عدد۱۰ می‌رسیم ، و در سطر دهم جدول، نتیجه را می‌خوانیم

روشن است که‌این کار را،بچه‌های کوچك‌هم‌می‌توانندانجام‌دهند. تنها تأسف در اینجاست کـه همهٔ عددها در جدول پیدا نمی‌شود . چقدر خوب است کـه بتوانیم مفهوم تـوان را طوری تعمیم بدهیم، کـه همه عددها (و مثلاً عدد ۳) را بتوان به صورت توانی از عدد ۲ نوشت.



گسترش مفهوم توان

به همین مناسبت، کوشش می‌کنیم، دیدگاه تازه‌ای نسبت به عمل «به توان رساندن» پیدا کنیم. ما، به‌دنبال نمائی می‌رویم که اگر عدد مفروض ۲ را به توان آن برسانیم، نتیجه عمل، مثلاً برابر با ۳ بشود. چنین عملی را، لگاریتم گرفتن و نتیجهٔ آن‌را ـ اگر وجود داشته باشد ـ لگاریتم گویند.

عمل با کسرها ناراحتتر است ، و در جدول‌ما هم، کسری وجود ندارد. کوچکترین توان عدد۲، یعنی نخستین توان آن، برابر است با ۲ واحد درست. برای اینکه عمل به توان رساندن را، گسترش دهیم ، باید به این نکته مهم توجه کنیم که برای بدست آوردن یك عدد بزرگتر، باید ازتوان‌بزرگتر ۲ ،استفاده کنیم. بنابراین، وقتی که بخواهیم کسرهای

کوچکتر از واحد را، به صورت توانی از ۲، در نظر بگیریم، باید به سراغ نماهای کوچکتر از واحد برویم.

اگر بخواهیم، درگام‌نخست، به عددهای درست بپردازیم،باید تکلیف این توانها را روشن کنیم:

$$۲^{۰} , ۲^{-۱} , ۲^{-۲} , ۲^{-۳} ,...$$

وقتی که می‌خواهیم مفهوم یك عمل را، در ریاضیات، گسترش دهیم و به صورت عامتری در آوریم ، باید به این نکتهٔ بسیار مهم توجه کنیم که قانونهای قبلی شمار، درستی‌خود را ازدست ندهند. هرگز نبایدهدف اصلی خود را فراموش کنیم : ما می‌خواهیم قانونهایی را که در مورد عددهای قبلی جاری بود، دربارهٔ عددهای جدید هم به کار ببریم.

درضمن، به این مطلب توجه می‌کنیم که اگر توان مفروضی از ۲ را در $۲^{۰}$ ضرب کنیم، خود همان عدد بدست می‌آید، زیرا، اگر ۰ را به نمای آن اضافه کنیم، هیچ تغییری درآن حاصل نمی‌شود.

بنابراین، $۲^{۰}$ را باید طوری تعریف کرد که ضرب در$۲^{۰}$، مقدار عدد را تغییر ندهد. تنها عددی که این خاصیت را دارد، عدد ۱ است. درنتیجه، $۲^{۰}$ (و با همین استدلال، توان صفر هرعدد دلخواه دیگر)، باید به این ترتیب تعریف شود:

$$۲^{۰} = ۱$$

که با این تعریف،ضمناً مثلث پاسکال هم، از قانون تنظیم خود، خارج نمی‌شود.

برای تعریف $۲^{-۱}$، باید توجه کرد که

$$2^1 \times 2^{-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

و اگر در تساوی

$$2^1 \times 2^{-1} = 1$$

دو طرف را بر عامل 2^1 تقسیم کنیم، بدست می‌آید:

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1}$$

به همین ترتیب، از شرط

$$2^2 \times 2^{-2} = 2^{2+(-2)} = 2^0 = 1$$

نتیجه می‌شود

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

واز شرط

$$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$$

باید بپذیریم که

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

وغیره.

بنابراین، اگر بخواهیم به‌قانونهای شمار احترام بگذاریم، باید توانهای منفی را به‌معنای نسبت عدد ۱ به توان مثبت متناظر آن بگیریم.

می بینید که جدول ما، از طرف بالا، گسترش پیدا می کند وشامل

کسرهای کوچکتر از واحد هم می‌شود:

$$۲^{-۳}=\frac{۱}{۲^{۳}}=\frac{۱}{۸}=۱:۸=۰/۱۲۵،$$

$$۲^{-۲}=\frac{۱}{۲^{۲}}=\frac{۱}{۴}=۱:۴=۰/۲۵،$$

$$۲^{-۱}=\frac{۱}{۲^{۱}}=\frac{۱}{۲}=۱:۲=۰/۵،$$

$$۲^{۰}=\quad ۱،$$

$$۲^{۱}=\quad ۲،$$

$$۲^{۲}=\quad ۴،$$

وسیلهٔ خوبی پیدا کردیم، تا بتوانیم به یاری آن، با کسرهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۸}$، ... ویا باکسرهای دهدهی ۰/۵ ، ۰/۲۵ ، ۰/۱۲۵ ، ... کار کنیم.

باوجود این، هنوزجا افتادگیهای زیادی‌بین عددهای جداگانه این جدول وجود دارد ومثلاً، بین دوعدد $۲=۲^{۱}$ و $۴=۲^{۲}$. اگر بخواهیم، عددی راکه‌بین ۲و۴ قرار دارد (مثل ۳ یا ۲/۷)، به صورت توانی از۲ بنویسیم، ناچار باید از نماهایی استفاده کنیم که بین ۱ و ۲ واقع‌اند (مثل $۱\frac{۱}{۲}$). چون $\frac{۳}{۲}=۱\frac{۱}{۲}$، بنابراین، باید تعریفی برای توان با نمای $\frac{۳}{۲}$ و پایهٔ ۲، ویا به طورکلی، برای هر نمای کسری، پیداکنیم.

این تعریف را، ازآنجا بدست می‌آوریم که قانون به‌توان رساندن

یك توان را همچنان قبول داشته باشیم. در اینصورت، روشن است که باید داشته باشیم:

$$\left(۲^{\frac{۳}{۲}}\right)^۲=۲^{۲\times\frac{۳}{۲}}=۲^۳$$

بنابراین، $۲^{\frac{۳}{۲}}$، تنها می‌تواند برابر عددی باشد که از مجذور آن، عدد $۲^۳$ بدست آید. این عدد، همان $\sqrt{۲^۳}$ است. در نتیجه ، بدست می‌آید :

$$۲^{\frac{۳}{۲}}=\sqrt{۲^۳}=\sqrt{۸}$$

اگر $\sqrt{۸}$ را تا یك رقم بعد از ممیز پیدا کنیم، به عدد ۲/۸ می‌رسیم، وچون

$$\frac{۳}{۲}=۳:۲=۱/۵$$

وچون محاسبهٔ با نماهایی‌که به صورت‌دهدهی‌نوشته شده باشند، ساده‌تر است ، بین دو عدد $۲^۱$ و $۲^۲$ از جدول خود ، می‌توانیم عدد تازه‌ای قرار دهیم:

$$۲^۱=۲،$$
$$۲^{۱/۵}=۲/۸،$$
$$۲^۲=۴$$

مشکل ما، همچنان باقی است و هنوز نمی‌توانیم عدد ۳ را، به صورت توانی از عدد ۲ نشان دهیم، اگر چه ۲/۸، تاحد زیادی به ۳ نزدیك است . می‌توان ثابت کرد که نمی‌توان عدد ۳ را به صورت

توانی‌از۲، که نمای‌آن یك کسر باشد، نشان داد، ولی ، می‌توان عـدد۳ را بـه تقریب ، و بـا هر دقتی کـه لازم باشد، با چنین نمائی، مشخص کرد. و به کمك این تقریبهاست که می‌توان توانهای بـا نمای گنگ را تعریف کرد.

همهٔ آنچه را که گفتیم، می‌تواند به عنوان آغازی اساسی بـرای تشکیل جدولهای لگاریتم باشد. وجدولهای قدیمی لگاریتم هم، درواقع به همین تـرتیب، درست شده‌اند. جدولهایی را کـه ما می‌شناسیم و در تمرینهای مدرسه‌ای مورد استفاده قرارمی‌دهیم، با پایهٔ ۱۰ درست‌شده‌اند (در این جدولها، پایه را نمی‌نویسند وتنها نماها را ذکر می‌کنند). به خاطر بازی با انگشتان، باید قربانی بیشتری‌بدهیم. بین تـوانهای عـدد ۱۰ (یعنی بین عددهای ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ وغیره)، نسبت بـه توانهای عدد۲، جاهای‌خالی خیلی بیشتری وجوددارد وبایدنیروی بیشتری صرف کرد تا این شکافهای عمیق، پرشود.

بسیاری ازجدولهای‌لگاریتم،شامل لگاریتمهای طبیعی هستند،که درآنها، پایهٔ عددها را e به حساب آورده‌اند. این e ، عـدد گنگی است که رقمهای نخست آن ...۲/۷۱ است.ولی ، چرا، به خصوص این عدد را،به‌عنوان مبنای لگاریتم‌طبیعی گرفته‌اند؟این موضوع را، به‌طریقه‌های گوناگون، می‌توان روشن کرد و من، به نظرخودم، ساده‌تریـن آنها را می‌آورم.

عدد ۱۰، به هیچوجه، ساده ترین مبنا برای جدولهای لگاریتمی نیست، حتی خیلی بهتر است که مبنا را عددی کوچکتر از ۲ بگیریم ، زیرا در اینصورت، جاهای خالی بین تـوانهای درست ایـن مبنا ، کمتر

می‌شود. روشن است که نمی‌شود تاعدد ۱ «پایین آمد»، زیرا هرتوانی‌از این عدد، برابر است با واحد. انتخاب عددکوچکتر از واحد هم درست نیست، زیرا وقتی یك کسر کوچکتر از واحد را به توان برسانیم،حاصل از خود کسر کوچکتر می‌شود، مثلاً:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

به‌عنوان‌آزمایش، مبنای ۱٫۱را انتخاب می‌کنیم. در این مورد، کار از اینجهت هم ساده‌تر می‌شود که توانهای ۱۱ را، به کمك مثلث پاسکال، می‌شناسیم ، تنها باید یادمان باشد که ممیزها را فراموش نکنیم. همچنین به‌خاطر داشته باشیم که‌توان صفرهرعددی برابر است‌با۱.

$$۱/۱^{۰}=۱،$$
$$۱/۱^{۱}=۱/۱،$$
$$۱/۱^{۲}=۱/۲۱،$$
$$۱/۱^{۳}=۱/۳۳۱،$$
$$۱/۱^{۴}=۱/۴۶۴۱،$$

. . . . . .

حاصل این توانها، خیلی به کندی رشد می‌کند وپیش از آنکه به پرکردن جاهای خالی بپردازیم، عددهای بسیاری را بین ۱ و ۲ بدست می‌آوریم.

روشن است که اگر مبنا را باز هم به واحد نزدیکتر بگیریم، موقعیت بهتری پیدا می‌کنیم، مثلاً ، مبنای ۱/۰۰۱ را اختیار می‌کنیم (دراینجا عددهای مثلث پاسکال،به وسیلهٔ دوصفر، از هم جدا می‌شود):

$$۱/۰۰۱^{۰}=۱،$$
$$۱/۰۰۱^{۱}=۱/۰۰۱،$$
$$۱/۰۰۱^{۲}=۱/۰۰۲۰۰۱،$$
$$۱/۰۰۱^{۳}=/۰۰۳۰۰۳۰۰۱،$$
. . . . . .

واین عددها، به طور بیسابقه‌ای به هم نزدیکند. حاصل این توانها، بـا چنان سرعت کند و لاك‌پشتی جلو می‌رود، که ممکن است این تردید را به وجود آورد که آیا ممکن است زمانی به عدد ۲ برسد. ولی می‌توان ثابت‌کرد که حاصل توانهای یك عدد، هر قدر هم که به ۱ نزدیك‌باشد، ولو خیلی کند و آهسته، به هر حال به سمت بینهایت میل می‌کند.

در این جدول، عیبی نه چندان بزرگ، وجود دارد . به مناسبت رشـد کند عـددهای آن ، عددی کـه خیلی هم بـزرگ نباشد، با توان بسیار بزرگی متناظر می‌شود، مثلاً، تنها در توان هزارم آن، به عدد۲، دسترسی پیدا می‌کنیم. بنابراین، به نظر می‌رسد کـه اگر نماها، هـزار مرتبه کوچکتر باشد، تأثیر مطبوع‌تری در مـا خواهد داشت. ولی،می‌ـ توان به سادگی این شکل را حل‌کرد: توان هزارم ۱/۰۰۱ را به عنوان مبنا انتخاب می‌کنیم. در واقع

$$\left(۱/۰۰۱^{۱۰۰۰}\right)^{\frac{۱}{۱۰۰۰}}=۱/۰۰۱^{۱۰۰۰\times\frac{۱}{۱۰۰۰}}=۱/۰۰۱^{۱}،$$

$$\left(۱/۰۰۱^{۱۰۰۰}\right)^{\frac{۲}{۱۰۰۰}}=۱/۰۰۱^{۱۰۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰۰}}=۱/۰۰۱^{۲}،$$

وغیره. از اینجا دیده می‌شود که کافی است بـه جای مبنای ۱/۰۰۱ ، مبنای $1/001^{1000}$ را انتخاب کنیم که در اینصورت، نماها، هزارمرتبه پایین می‌آیند.

اگرمبنای $1/001^{1000}$ رابه‌توان‌برسانیم،می‌توان گام به‌گام، بافاصله‌هائی به‌طول یکهزارم جلو رفت. با توجه به‌اینکه در شکل دهدهی خود،داریم

$$\frac{1}{1000}=0/001,\quad \frac{2}{1000}=0/002,\quad \frac{3}{1000}=0/003,$$

وبا توجه به آنچه که قبلاً در مورد توانهای ۱/۰۰۱ و توانهای مبنای تازه، دیدیم، بدست می‌آید:

$$\left(1/001^{1000}\right)^{0}=1/001^{0}=1,$$

$$\left(1/001^{1000}\right)^{0/001}=1/001^{1}=1/001,$$

$$\left(1/001^{1000}\right)^{0/002}=1/001^{2}=1/002001,$$

$$\left(1/001^{1000}\right)^{0/003}=1/001^{3}=1/003003001,$$

. . . .

در اینجا، با وجودی‌که بین عددها ونماهای متناظر آنها، فاصلهٔ غیر عادی وجود ندارد، تراکم عددها حفظ شده است.

روشن است که مبناهای

$$1/0001^{10000},\ 1/00001^{100000},\ 1/000001^{1000000},\ \ldots$$

خیلی مناسبترند. می‌توان ثابت کرد که این دنباله به سمت عدد گنگی میل می‌کنند که با رقمهای ...۲/۷۱ آغاز می‌شود. این‌عدد، نقش‌بسیار مهمی در ریاضیات به‌عهده دارد و‌به همین مناسبت، برای‌آن‌نام خاصی انتخاب کرده‌اند: عدد e . لگاریتمهایی را که بامبنای e ، بدست‌آمده باشند، لگاریتمهای طبیعی گویند. ومادر واقع، باروشی طبیعی وساده، دیدیم که این راحترین و مناسب‌ترین مبنا برای لگاریتم است.

منحنیهای صاف وهموار

به یاری لگاریتم، توانستیم بریدگیهایی را که ناشی از تعریف توان بود ، پرکنیم. حالا دیگر،توان برای هرنمای دلخواهی، معنا دارد وناچار نیستیم که برای نماها، تنها عددهای طبیعی را درنظر بگیریم . باتوجه به همین مطلب است که می‌توانیم «منحنی حرارتی» تابع نمایی را، دقیقاً کامل کنیم. ما معادله را می‌شناسیم وکارباآنرا یادگرفته‌ایم. بنابراین، می‌توانیم این تابعها را به صورت معادله هم بنویسیم. پایه را، عدد ۲ می‌گیریم و نمای آنرا متغیر فرض می‌کنیم، یعنی این نما، عدد معین وثابتی نباشد و در نتیجه آنرا به x نشان می‌دهیم . مقدار تابع هم، در بستگی با x تغییر می‌کند که ما آنرا با حرف y مشخص می‌کنیم:

$$y = 2^x$$

مقادیر x را روی محور افقی ، به کمك واحدی که روی شکل می‌بینید، معین می‌کنیم (روی‌این محور، نقطهٔ صفرمشخص شده است ودر

سمت چپ آن ، عددهای منفی قرار دارد). مقادیر y را هم روی خطهای قائم و بـا واحدی انتخابی (کـه روی شـکل صفحهٔ ۲۳۷ مشخص‌شده است) جدامی‌کنیم:

اگر $x=-۳$ ، دراینصورت $y=۲^{-۳}=\frac{۱}{۲^{۳}}=\frac{۱}{۸}$ ،

اگر $x=-۲$ ، دراینصورت $y=۲^{-۲}=\frac{۱}{۲^{۲}}=\frac{۱}{۴}$ ،

اگر $x=-۱$ ، دراینصورت $y=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲^{۱}}=\frac{۱}{۲}$ ،

اگر $x=۰$ ، دراینصورت $y=۲^{۰}=۱$ ،

اگر $x=۱$ ، دراینصورت $y=۲^{۱}=۲$ ،

اگر $x=۲$ ، دراینصورت $y=۲^{۲}=۴$ ،

اگر $x=۳$ ، دراینصورت $y=۲^{۳}=۸$ ،

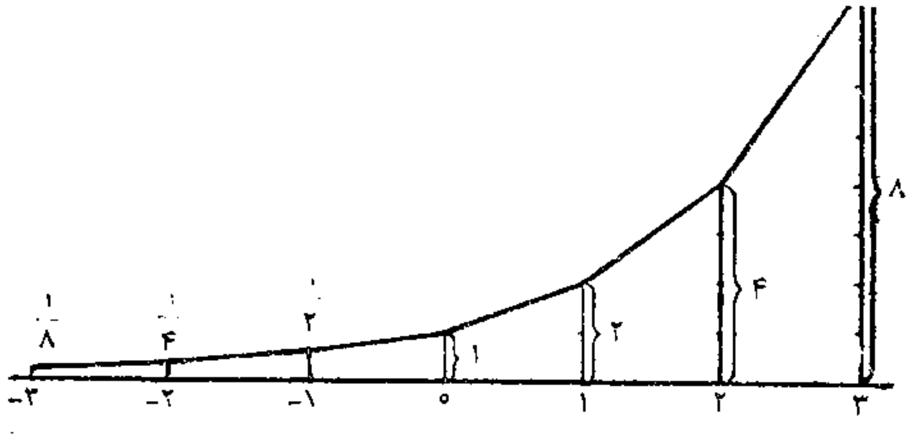
و بنابراین، در نقطه های

$$-۳ , -۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۳$$

باید روی قائمهای این نقطه‌ها و به طرف بالا، به ترتیب مقادیر

$$\frac{۱}{۸} , \frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۲} , ۱ , ۲ , ۴ , ۸$$

را جدا کرد. حالا ، می‌توان مقادیر بینابینی را بـرای x انتخاب کـرد، مثلاً می‌دانیم که



$$۲^{۱\frac{۱}{۲}} = ۲^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt{۲^۳} = \sqrt{۸} = ۲/۸...$$

به همین‌ترتیب، می‌توان‌برای x ،عددهای دیگری هم، بین عددهای‌درست در نظر گرفت. مثلا، اگر به یك رقم بعد از ممیز اکتفا کنیم، می‌توان بدست آورد:

برای $x = -۲\frac{۱}{۲}$؛ $y = ۰/۲$؛ برای $x = \frac{۱}{۲}$: $x = ۱/۴$؛

برای $x = -۱\frac{۱}{۲}$؛ $y = ۰/۴$؛ برای $x = ۱\frac{۱}{۲}$: $y = ۲/۸$؛

برای $x = -\frac{۱}{۲}$؛ $y = ۰/۷$؛ برای $x = ۲\frac{۱}{۲}$: $y = ۵/۷$؛

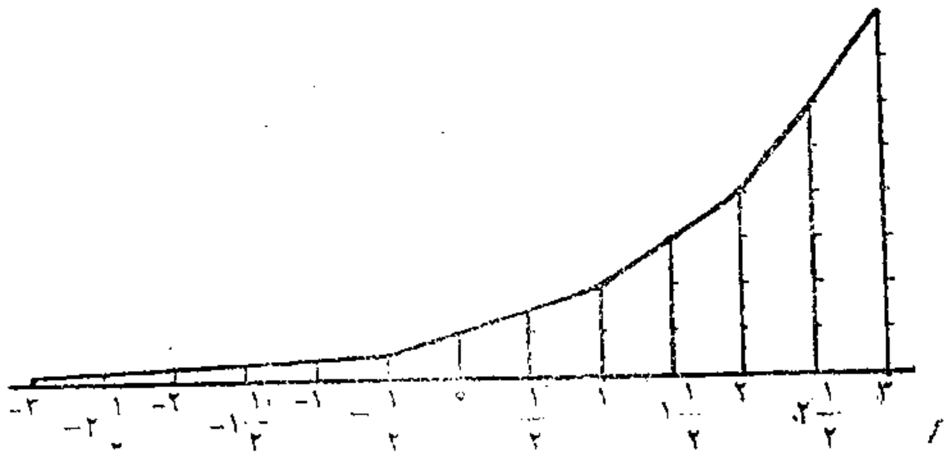
بنابراین، می‌توانیم شکل موردنظرمان را کاملتر کنیم، به این ترتیب که روی قائمهای نقطه‌های

$$-۲\frac{۱}{۲}, -۱\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۱\frac{۱}{۲}, ۲\frac{۱}{۲}$$

به ترتیب مقادیر

۰/۲ ، ۰/۴ ، ۰/۷ ، ۱/۴ ، ۲/۸ ، ۵/۷

را به طرف بالا جداکنیم:



این «منحنی حرارتی»، خیلی کمتر ازمنحنی قبلی، درمسیر خودشکستگی دارد. هرچه، تعداد نقطه‌های بینابینی رابیشتر بگیریم و مقدار تابع رابه ازای مقادیرگویاوگنگ x ، پیداکنیم، «منحنی حرارتی»ما بیشترهموار می‌شود وبه شکل منحنی صاف ویکنواخت درمی‌آید.

اگر به سمت چپ شکل نگاه کنیم، می‌بینیم که منحنی به طور روشنی، به طرف محور افقی میل می‌کند، ولی هرگز به آن نمی‌رسد. در واقع، چنان نمایی وجود ندارد که به ازای آن داشته باشیم $۲^x = ۰$، در حالیکه روی محور افقی، تنها نقطه‌هایی قرار دارند که مقدار متناظر آنها برای y ، برابر صفر است.

هذلولی

همین وضع را می‌توان در بررسی «منحنی حرارتی» تقسیم هم مشاهده کرد (ما تا کنون، این منحنی را رسم نکرده‌ایم). فرض کنید که مقسوم برابر با ۱۲ باشد (۱۲ را از اینجهت انتخاب کرده‌ایم که مقسوم‌علیه‌های

زیادی دارد). مقسوم علیه را متغیر مـی‌گیریم و به x نشان مـی‌دهیم. روشن است که با تغییر x ، نتیجهٔ تقسیم، یعنی خارج قسمت هم تغییر می‌کند که ما آنرا با y مشخص می‌کنیم.

$$y=\frac{۱۲}{x}$$

اگر $x=-۱۲$، در آنصورت: $y=\frac{۱۲}{-۱۲}=-۱$ ،

اگر $x=-۶$ ، درآنصورت: $y=\frac{۱۲}{-۶}=-۲$ ،

اگر $x=-۴$ ، درآنصورت: $y=\frac{۱۲}{-۴}=-۳$ ،

اگر $x=-۳$ ، درآنصورت: $y=\frac{۱۲}{-۳}=-۴$ ،

اگر $x=-۲$ ، درآنصورت: $y=\frac{۱۲}{-۲}=-۶$ ،

اگر $x=-۱$ ، درآنصورت: $y=\frac{۱۲}{-۱}=-۱۲$ ،

اگر $x=۱$ ، درآنصورت: $y=\frac{۱۲}{۱}=۱۲$ ،

اگر $x=۲$ ، درآنصورت: $y=\frac{۱۲}{۲}=۶$ ،

اگر $x=۳$ ، درآنصورت: $y=\frac{۱۲}{۳}=۴$ ،

اگر $x=۴$ ، درآنصورت: $y=\frac{۱۲}{۴}=۳$ ،

اگر $x=۶$ ، درآنصورت: $y=\frac{۱۲}{۶}=۲$ ،

اگر $x=۱۲$، درآنصورت : $y=\frac{۱۲}{۱۲}=۱$ ،

مقادیر مثبت y را روی عمود وبه‌طرف بالا ومقادیر منفی y را روی عمود به طرف پایین می‌گیریم. بنابراین، درنقطه‌های

$$-۱۲، -۶، -۴، -۳، -۲، -۱$$

بایدبه اندازهٔ

$$-۱، -۲، -۳، -۴، -۶، -۱۲$$

واحد به‌طرف پایین، ودر نقطه‌های

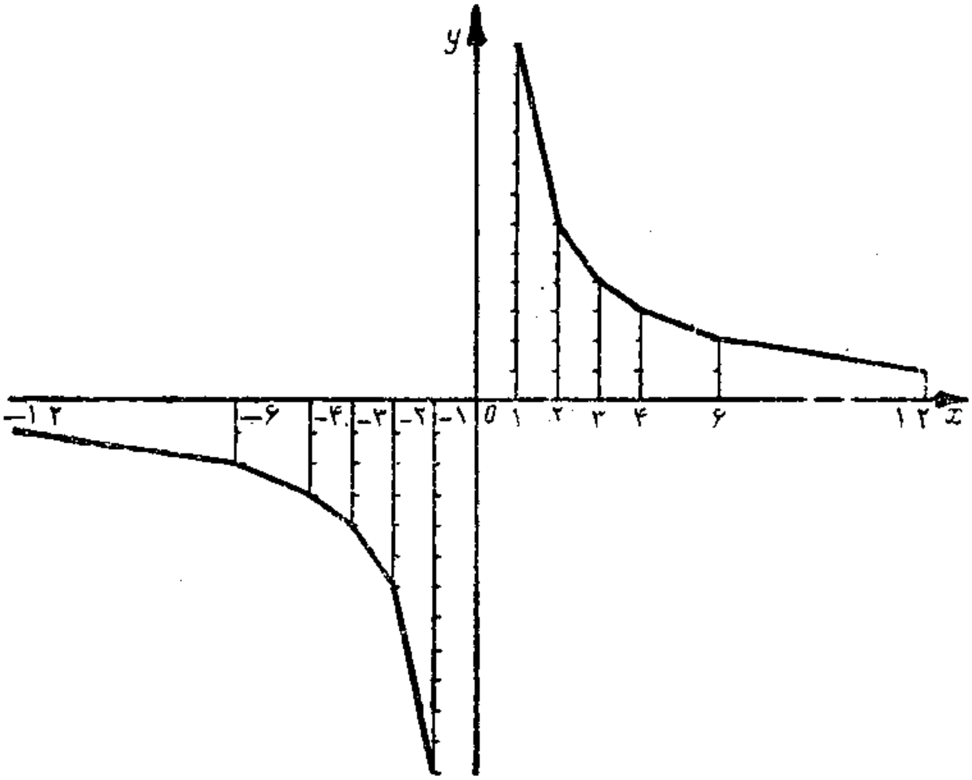
$$۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲$$

به اندازهٔ

$$۱۲، ۶، ۴، ۳، ۲، ۱$$

واحد به طرف بالا، جدا کنیم (روی شکل-درصفحهٔ ۲۴۱- واحدهای افقی و قائم رایکی گرفته‌ایم).

لزومی ندارد که به نقطه‌های بینابینی بپردازیم،زیرامنحنی ما،به اندازهٔکافی صاف‌وهموار است.جالب است، که به‌رویهٔحرکت این‌منحنی



در نقطه‌های انتهایی، توجه کنیم. برای اینکه به‌این‌موضوع بپردازیم ،از نقطهٔ صفر، خط قائمی می‌گذرانیم که جهت‌آن با مقدار y تطبیق کند. خط افقی را، محور x ، وخط قائم را، که عمود بر محور x است واز صفرگذشته است، محور y می‌نامیم. می‌بینیم که‌هر دوشاخهٔ‌منحنی ما مرتباً، هم به محور x وهم به محور y نزدیك می‌شوند، ولی هرگز به آنها نمی‌رسند. اگر، در امتداد محور x ، به‌طرف راست جلوبرویم، مثلاً برای ۲۴ = x داریم:

$$y = \frac{۱۲}{x} = \frac{۱۲}{۲۴} = \frac{۱}{۲}$$

وبرای ۳۶ = x بدست می‌آید:

$$y=\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$$

وبرای $x=۴۸$:

$$y=\frac{۱۲}{۴۸}=\frac{۱}{۴}$$

وغیره.اگربه همین‌ترتیب، روی محور x ،از نقطهٔ صفر، دورتر و دورتر بشویم ، مقدار y مرتباً کوچك و کوچکتر می‌شود ، ولـی هرگزبـه‌مقدار مساوی صفر، نمی‌رسد. عدد ۱۲ را به هرچند قسمت که بکنیم، باز هم برای هر قسمت، مقداری‌بدست می‌آید. به‌همین ترتیب، اگر روی محور x ، به‌طرف منفی‌هم برویم، مقادیری را بدست‌می‌آوریم که به‌سمت‌صفر میل می‌کنند، ولی هرگز برابر صفر نمی‌شوند:

$$-\frac{۱}{۲},\ -\frac{۱}{۳},\ -\frac{۱}{۴},\ldots$$

به این ترتیب، منحنی‌ما، دائماً به محور x ، نزدیك و نزدیکتر می‌شود، ولی هیچوقت به آن نمی‌رسد.

حالااگر $x=\frac{۱}{۲}$ بگیریم، کافی است‌به‌یادبیاوریم که واحد، شامل‌دو نیمه است وبنابراین در ۱۲، به اندازهٔ ۲۴ نیمه وجوداردد:

$$y=۲۴$$

و به همین ترتیب:

اگر $x=\frac{۱}{۳}$ ، در آنصورت، $y=۳۶$ ،

اگر $x=\frac{1}{4}$ ، درآنصورت: $y=48$ ،

وغیره. یعنی وقتی که مقدار x ، به‌سمت صفر میل کند، مقدار y ،بزرگ وبزرگتر می‌شود. منحنی ما، هرگز به محور y نمی‌رسد، زیرا، برای‌هر نقطه‌ای که روی محور y باشد باید داشته باشم $x=0$، که‌در اینصورت به‌$\frac{12}{0}$ می‌رسیم، وچنین تقسیمی، هیچ معنا ندارد: بر صفر نمی‌توان تقسیم کرد!

تقسیم بر صفر

تقسیم را به‌کمك ضرب، آزمایش می‌کنیم: $20:5=4$ ،زیرا $5\times4=20$. حالا اگر عددی را بر ۰ تقسیم کنیم ، چه بدست می‌آید؟ کوشش می‌کنیم پاسخ رابدست‌آوریم.

آیا $5:0=0$ ؟

آیا $5:0=5$ ؟

آیا $5:0=1$ ؟

آزمایش کنیم:

$0\times0=0$ ، در اینجا ۵ بدست نیامد.

$0\times5=0$ ، اینهم برابر ۵ نشد.

$0\times1=0$ وباز هم ۵ پیدانشد.

هرعددی را که در صفر ضرب کنیم، حاصلضرب همیشه برابر صفر می‌شود، یعنی هرگزاز نتیجهٔ چنین ضربی، عدد ۵ بدست نمی‌آید. واین به معنای آنست که نمی‌توان ۵ را بر ۰ تقسیم کرد.

دربارهٔاین‌نتیجه، کمی تأمل کنیم. یك عدد هرقدر کوچکتر باشد، به

تعداد بیشتری در عدد ۵ می گنجد. هرچه مقسوم علیه کوچکتر بشود، خارج قسمت بزرگتر می‌شود. اگر بزرگترین عدد، وجود می‌داشت، درآنصورت، می‌توانست نتیجهٔ تقسیم بر کوچکترین عدد، یعنی ۰، باشد. ولی، چنین عددی وجود ندارد که از همهٔ عددها بزرگتر باشد.

شاید دست کم بتوان خود ۰ را بر ۰ تقسیم کرد. آزمایش کنیم.

ممکن است ۱ = ۰ : ۰؟ آزمایش می کنیم: ۰ = ۱ × ۰.

چه خوب، ظاهراً همه چیز درست است! ولی، به آزمایش خود ادامه می‌دهیم:

$$۰ : ۰ = ۱۳۷$$

وبدون هیچ زحمتی، معلوم می‌شود که ... باز هم درست است! زیرا ۱۳۷ × ۰ هم برابر ۰ می‌شود. به نظر می‌رسد که نتیجه به‌کلی نامعین است، زیرا با هر نتیجهٔ دلخواهی که آزمایش کنیم، درستی آن تأیید می‌شود. بنابراین، ناممکن بودن تقسیم بر صفر، در تمام حالتها وبدون هیچ استثنائی، به قوت خود باقی می‌ماند.

یکی از مجله‌های فکاهی که برای دانش آموزان چاپ می‌شود، این منع تقسیم بر صفر را به این ترتیب توضیح داده بود: «وقتی که خداوند آدم را آفرید ودر بهشت جاداد، به نخستین انسان چنین گفت: تو بر هر عددی می‌توانی تقسیم کنی، به جز صفر!»

ممکن است گمان کنید که با این تأکیدی که در منع تقسیم بر صفر می‌شود، طبعاً کسی به فکر نمی‌افتد که عددی را برصفر تقسیم کند. البته، کسی به این تقسیم نمی‌پردازد، ولی، گاهی، صفر به صورت پنهانی

وبا نقاب ظاهـر می‌شود. ممکن‌است همهٔ‌افـراد، صفر را در چنین‌عبارتـی نبینند :

$$(x+2)^2-(x^2+4x+4)$$

ولـی، در اینجا، از $(x+2)^2$، خود آن، منتهی به صورت بازشده‌اش، کم شده‌است. تقسیم برصفر، در حالتی که زیر نقابی پنهان شده است ، مبنای شوخیهایی است که درآنها، ظاهراً ثابت می‌شود که مثلا ۲ = ۱. اگر در ریاضیات، تنها یك اشتباه بشود واگر این منع بـرداشته‌شود و تقسیم برصفر ، به عنوان یك حقیقت ، مجاز شناخته شود، درآنصورت، می‌توان به هر نتیجهٔ دلخواهی، و از آنجمله اثبات ۲ = ۱ رسید.

به یاد بیاورید، وقتی که هم اکنون، شکل منحنی مورد نظرمان رابررسی می‌کردیم (ومن نام‌آنرا برای شما فاش می‌کنم: این یك‌هذلولی بود)، این منع را فراموش نکردیم. به خصوص، به این مطلب، که بـه چشم می‌خورد، توجه کنیم‌که این منحنی از دوشاخهٔ جدا از هم درست شده است. هرکدام از این دو شاخه، هموار و پیوسته است؛ شاخهٔ سمت چپ، به طرف پایین وتا بینهایت وشاخهٔ سمت راست، به طرف بـالا و تا بینهایت پیش می‌رود. وبین آنها ، محور y به‌پـا ایستاده است ، و همچنین شمشیربرهنه‌ای اخطار می‌کند: می‌توانی هرقدرکه دلت‌بخواهد نزدیك شوی، ولی حق نداری قدم به صفر بگذاری!

۱۴. تنها یك ریاضیات وجود دارد

مفهوم کلی تابع

اگر چه ما می‌دانیم کـه بعضی از تابعها را می‌توان بـه صورت

معادله نوشت، ولی نباید گمان کرد که برای تعریف تابع، وجودچنین دستوری خیلی مهم است. آزمایش کنید، y را به‌صورت‌تابعی از x ، به کمك دستور ساده‌ای بیان کنید: اگر x عددی گویا باشد، مقدار y برابر است با ۱، و اگر عددی گنگ باشد، مقدار y برابر است با ۰ (این رابطهٔ تابعی را، تابع دیریکله‌می‌گویند).

دراین‌تعریف،هیچ‌اشکالی‌وجود ندارد: مقدار y دقیقاً بـه‌مقدار x بستگی دارد، وهرمقدار x ، متناظر با مقدار کاملاً مشخصی از y است اگر مثلاً داشته باشیم $x = ۱/۵$ ، درآنصورت $y = ۱$ ؛ واگر داشته باشیم $x = \sqrt{۲}$ ،درآنصورت $y = ۰$. با وجوداین اگربخواهید، دستوری برای بیان‌این رابطهٔ تابعی پیداکنید، موفق نمی شوید. وباکمال تاسف، نمایش‌تغییرات‌آنرا هم نمی‌توانید رسم کنید، زیرا نوسان‌آن بین ۰و۱، خیلی تند وشدید است: چه عددهای‌گویاوچه عـددهای گنگ، بی‌اندازه فشرده‌اند .

ماهیت مفهوم تابع در اینست که بین زوج (x،y) (مقدار x و مقدار متناظر آن y)، رابطه‌ای وجود داشته باشد. ضمناً ، هیچ لـزومی ندارد‌که x ، همهٔ مقادیررا قبول کند. در بارهٔ تابعی‌که بامعادلهٔ $y = \frac{۱۲}{x}$ تعریف کردیم، می‌دانیم که x ، مقدار ۰ را قبول نمی‌کند. برای $x = ۰$ تابع نا معین است. وقتی که می‌خواهیم تابعی را تعریف کنیم باید :

ـ نشان دهیم که مقدار x را از کدام مجموعهٔ عددی، می‌توانیم انتخاب کنیم؛

ـ معلوم کنیم که چه مقادیری برای y ، باید بـه هر مقدار x ، که از این مجموعه انتخاب شده است، متناظر شود.

روشن است که تصور یك تابع به‌صورت رسم نمایش تغییرات

آن، خیلی به ما کمك می‌کند. یك شکل خوب، خیلی بیشتر از شرح و بیان یك تابع، برای ما حرف می‌زند.

فرض‌کنید تابعی، به این ترتیب، تعریف شده باشد: برای هر مقدار x ، مقدار y برابر است بابزرگترین عدد درستی که در x وجود دارد . مثلاً:

$$x=۵/۴۵،\qquad y=۵;$$
$$x=\sqrt{۲}،\qquad y=۱$$

زیرا می‌دانیم که: $\sqrt{۲}=۱/۴۱...$

سعی می‌کنیم این تابع را پیش خود مجسم کنیم:

$$x=۰،\qquad y=۰;$$
$$x=۰/۱،\qquad y=۰;$$
$$x=۰/۹۹۹،\qquad y=۰;$$

و روشن است تا وقتی که x به مقدار ۱ نرسیده است، مقدار y همچنان برابر با ۰ خواهدشد .

سپس،

$$x=۱،\qquad y=۱;$$
$$x=۱/۰۰۱،\qquad y=۱;$$
$$x=۱/۹۹،\qquad y=۱$$

وبنابراین تا وقتی که مقدار x ، به عدد ۲ نرسیده است، برای y همان عدد ۱ بدست می‌آید.

وقتی که در جهت منفی هم حرکت کنیم، وضع به همین ترتیب است. بنابراین، طرح نمایش تغییرات زیر بدست می‌آید:



نمایش تغییرات این تابع، از پاره خطهای افقی جدا از هم تشکیل شده است. کافی است، نگاه تندی به شکل بیندازیم تا آگاهیهای زیادی از تابع خود بدست آوریم: آنجا که منحنی قطع شده است، مقدار تابع جهشی برابر با ۱ دارد؛ روی پاره‌خطهای افقی، مقدار تابع بدون تغییر باقی می‌ماند. همانطور که می‌بینیم، نه تنها یك تابع می‌تواند انفصالهای بینهایت داشته باشد، آنطور که در حالت $y=\frac{۱۲}{x}$ به‌ازای $x=۰$ دیدیم، بلکه حتی می تواند دارای انفصالهای کوچکی باشد، مثل نمونه‌ای که هم اکنون بررسی کردیم.

نمایش تغییرات هر دوتابع، دست کم در خارج نقطه‌های انفصال به صورت منحنیهای هموار و پیوسته‌ای هستند. درحالیکه، تابع‌دیریکله حتی در یکی از نقطه‌های خود، هموار نیست: هیچ فاصله‌ای، ولو خیلی کوچك، وجود ندارد که درآن حتی یك عددگویا، یایك عددگنگ، پیدا نشود، ودراین ضمن، مقادیر تابع، مرتباً به اندازهٔ واحد، جهش می‌کند.

همچنین، نباید گمان کردکه اگر تابعی بتواند به کمك یك‌دستور بیان شود، واگر برای رسم‌آن، مقادیر x را به اندازهٔ کافی نزدیك به‌هم انتخاب کنیم، منحنی آن حتماً در همهٔ نقطه‌های خود، هموار باشد و هیچگونه «شکستگی» نداشته باشد. فرض کنید که این تعریف را به ما

داده باشند: مقدار y برای هر مقدار x ، برابر است با قدر مطلق x ، یعنی مقدار آن بدون در نظرگرفتن علامت. برای قدر مطلق، نشانهٔ مخصوصی وجود دارد: قبل‌وبعد ازعدد، پاره‌خط‌کوتاه قائمی‌می‌گذارند. مثلاً:

$$|-۳|=۳; \quad |+۳|=۳$$

و روشن است که : $۰=|۰|$. بنابراین، تابعی را که تعریف کردیم،می‌توان به‌کمك دستور سادهٔ زیر مشخص‌کرد:

$$y=|x|$$

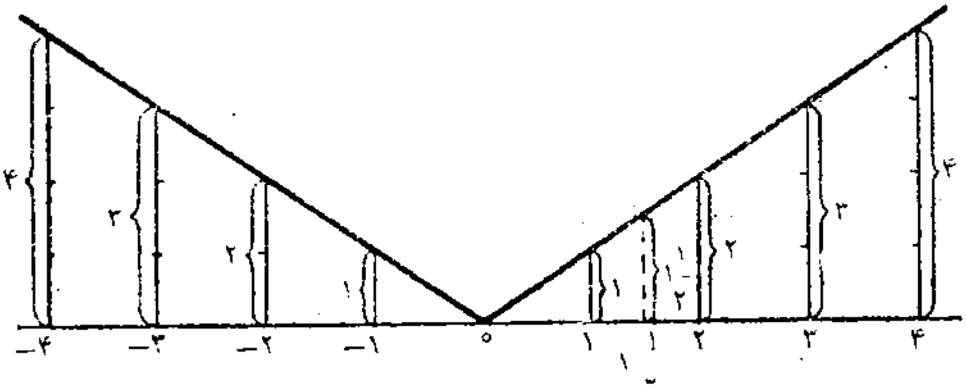
به این ترتیب، اگر x در نقطه‌های

-۴، -۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴

باشد، برای y ، به ترتیب، مقادیر

۴، ۳، ۲، ۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴

بدست می‌آید ونمایش تغییرات‌آن، اینطور می‌شود:



شکل این تابع، از دونیم خط تشکیل شده است‌که باهم زاویه‌ای درست کرده‌اند، و هرچقدر که از مقادیر بینابینی استفاده کنیم، هیچ مطلب

تازه‌ای پیدا نمی‌شود. مثلاً اگر $x=1\frac{1}{2}$ ، در اینصورت $y=\left|1\frac{1}{2}\right|=1\frac{1}{2}$ وما، این مقدار را درروی شکل، به صورت خط چین نشان داده‌ایم: این نقطه هم روی یکی ازضلعهای زاویه قرار می‌گیرد.

شکل هندسی، اگرچه کاملاً دقیق هم‌نباشد، درواقع، عکس‌یادگار رفتار تابع است. درست است که قلم ما، نمی‌تواند خط را با دقت کامل رسم کند، درست‌است که خط‌کش‌ما، خط راست ایده‌آلی نیست، درست است که چشمها ودستهای ما، ابزارهای کاملاً دقیقی نیستند، ولی، با وجود همهٔ اینها، به یاری هندسه می‌توان دربارهٔ هرشکل، بدون توجه‌به تصویری که رسم شده است، با دقت ودرستی کامل، داوری کرد. اگر، مثلاً، من از خاصیتهای هندسی هذلولی‌آگاه باشم، وبدانم که تابع‌رسم شده، یك هذلولی است، می‌توانم اطمینان داشته باشم که‌تقریباً همه‌چیز را دربارهٔ تابع $y=\frac{12}{x}$ می دانم.

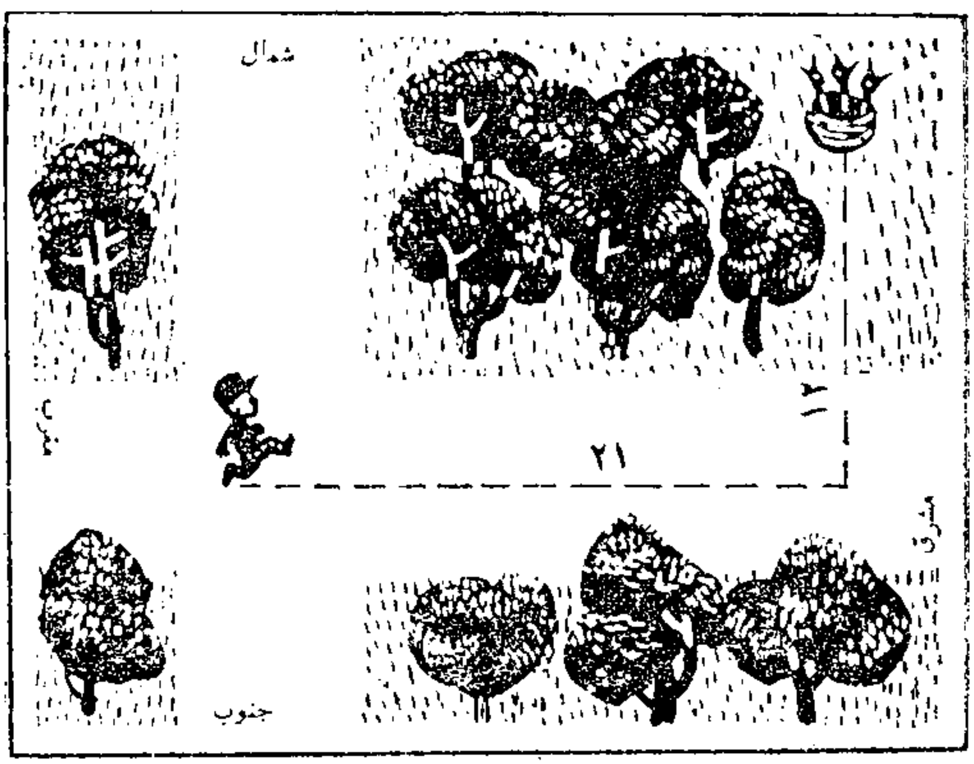
هندسهٔ تحلیلی

ولی، هندسه هم‌اغلب متوجه یاری شاخهٔ دیگرریاضیات می‌شود. مثلاً،وقتی که‌بخواهیم مفهومی را به‌صورت واحد ومشخصی درآوریم، متوسل به دستور می‌شویم. وما دیدیم که چگونه می‌توان موضوعها‌و مساله‌های گوناگونی را به‌کمك یك دستور بیان کرد. به‌عنوان نمونه، در مورد محاسبهٔ سطح وحجم، به چنین دستورهایی نیاز داشتیم. تنها، یك ریاضیات واحد وجود دارد. آنطور که معمولاً دانش آموزان گمان می‌کنند، ریاضیات، به دو دانش متفاوت هندسه وجبر، تقسیم نمی‌شود. این تصور، بیشتر از اینجا پیش می‌آید که هم برنامه وهم معلمین،اعلام می‌کنند که مثلاً درس ریاضی دوشنبه وپنجشنبه ،جبر نامیده می‌شود ودرس‌ریاضی سه‌شنبه، هندسه. وچنین‌تقسیمی، ریاضیات راشکسته‌است

وبه دوموضوع جدا گانه تبدیل کرده است.

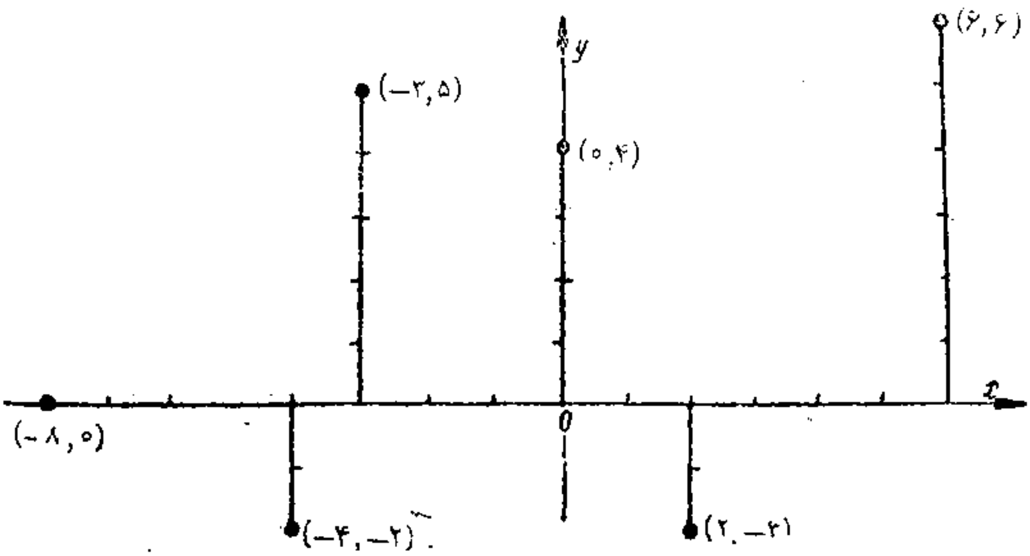
یکی ازپلهایی که‌هندسه را به شاخهٔ دیگرریاضیات مربوط‌می‌کند، دستگاه‌مختصات است ، یعنی دوخط راست عمود برهم، کـه از نقطهٔ صفر گذشته باشند: محورهای x و y ،که ما درموقع شرح مربوط به‌هذلولی با آنها سروکار داشتیم.

به کمك این دو خط راست، می‌توان نقطه‌های واقع بـرصفحه را به وسیلهٔ عددها، مشخص کرد. این‌دوخط راست‌را می‌توان بـه دوخیابانی تشبیه‌کرد،که از میان چمن می‌گذرند. اگر، زیربوته‌ای از چمن،آشیانهٔ پرنده‌ای باشد، جای آنرا می‌توان به‌این ترتیب، معین کرد: از آشیانه، به طور مستقیم و با گامهای یکنواخت به طرف یکی ازخیابانهامی‌رویم



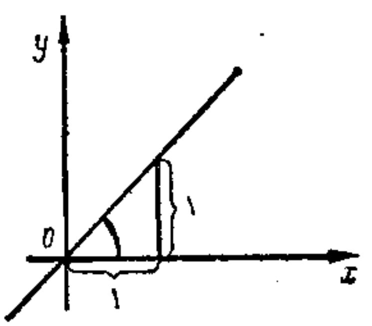
و تعداد قدمها را می شماریم ؛ بعد، تعداد قدمهایی را که برای رسیدن به‌محل برخورد دو خیابان لازم است، می‌شماریم.
حالا اگر من بخواهم آشیانه را به کسی نشان بدهم و بدانم که باید از چهار راه ۲۱ قدم به طرف مشرق و سپس ۱۲ قدم به طرف شمال بروم، می‌توانم‌بدون هیچ اشکالی، خودم را به‌محل‌آشیانه برسانم. این دوعدد، همراه با جهت معینی که دارند، عبارتند از دومختص نقطهٔ مورد نظر. درهندسه، جهتها رابانشانه‌های «+» و«−» نشان می‌دهیم وضمناً،برای اینکه قاعده‌ای عمومی وجود داشته باشد، جهتهای بالا وسمت راست‌را مثبت، وجهتهای پایین وسمت چپ را منفی می‌گیریم. به جای قدمها ، واحد معینی انتخاب می‌کنیم ومختصات را به کمك این واحد، اندازه‌گیری می‌کنیم. به این ترتیب، هرنقطه از صفحه، متناظر با یك زوج عدد، وبرعکس هرزوج عدد متناظر با یك‌نقطهٔ معین می‌شود. راهی راکه باید درامتداد محور x طی‌کرد، طول نقطه وراهی‌راکه‌بایددرامتدادمحور y طی کرد، عرض نقطه می‌نامیم. همیشه طول نقطه را، قبل از عرض‌آن می‌نویسیم.

در اینجا، نقطه‌هایی را مشخص کرده‌ایم ومختصات آنها راهم پهلویشان نوشته‌ایم:



(روشن است که نقطه‌ها وعددها را، باروشهای دیگری هم می‌توان به هم بستگی داد. مثلاً، می‌توان پیش خود مجسم کرد که خیابانها بر هم عمورنباشند. باوجود این، اگر جهتهاراانتخاب کنیم، درچنین حالتی هم می‌توان جای یك نقطه را با دوعدد مشخص کرد. حتی می‌توان فرض کرد که در چمن بیشتر از یك خیابان وجود ندارد وروی این خیابان ، مثلاً درختی قرار دارد. من می‌توانم قدمهای خود رامستقیماً ازآشیانه تا درخت بشمارم؛ در اینصورت به راحتی می‌توانم همین راه را برگردم و به آشیانه برسم، به شرطی که وسیله‌ای در اختیار داشته باشم تا به کمك آن بتوانم جهت حرکت از درخت به طرف آشیانه را پیداکنم).

وقتی که بتوانیم هرنقطه را به یاری یك زوج عدد مشخص کنیم، این امکان هم پیدا می‌شودکه خط را با زوج عددها متناظر کنیم، یعنی خط را به‌صورت یك معادله نشان دهیم. خط راستی را درنظر می‌گیریم که از نقطهٔ مبداء ونقطهٔ (۱،۱) گذشته باشد:



اگر این خط راست را، خاکریز راه آهن فرض کنیم، شیب آن برابر با

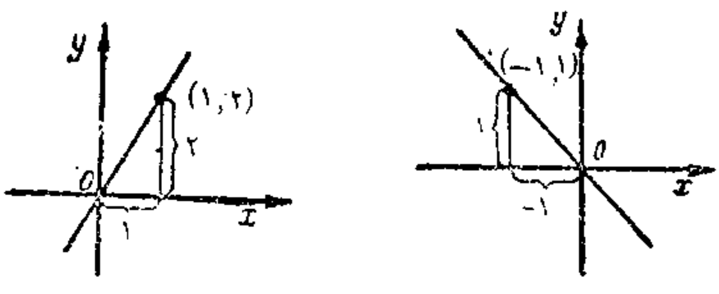
۱ : ۱

می‌شود. واین به معنای آنست که اگرما در امتداد خاکریز وروی خط

افقی به‌اندازهٔ ۱ متر جلوبرویم، ارتفاع خاکریزبرابر ۱مترمی شود.چون شیب این خاکریز یکنواخت است، در فاصلهٔ۲متری، ارتفاع‌خاکریزازخط افقی برابر۲متر‌ودرفاصلهٔ ۳متری،برابر ۳ متر می‌شود وغیره. بنابراین، همهٔ نقطه‌هایی که براین خط راست قرار دارند، با این خاصیت مشخص می شوند کـه مختصاتی برابر دارند، یعنی طول هر نقطهٔ دلخواه از این خط، بـا عرض‌آن برابر است ودر هر نقطهٔ آن داریم:

$$y = x$$

در خارج این خط، هیچ نقطه‌ای پیدا نمی‌شودکه دو مختص برابر داشته بـاشد. اگـر نقطهٔ دیگـری را بـه مبداء، یعنی نقطهٔ صفر ، وصل کنیم، خطی با شیب بیشتر یا کمتر بدست می‌آید:



درحالت اول (شکل سمت چپ)، شیبی برابر ۱ : ۲ بدست می‌آید؛ بنابراین عرض هر نقطهٔ ازخط راست، دو برابر طول آن خواهد بود. در حالت دوم (شکل سمت راست)، اگر چه شیب خط برابر است با ۱ : ۱، ولی در اینجا ما با خط راستی سروکار داریم که به طرف پایین می‌رود نه به‌طرف بالا. به همین مناسبت شیب این خط را باید بانسبت(۱ـ):۱ معین‌کرد. می‌بینیم‌که دومختص هر نقطه‌ای از این خط راست، ازلحاظ قدر مطلق، برابرند، منتهی همیشه علامتهای متفاوتی دارند، یعنی برابر نیستند.

در واقع، مختصات هرنقطه‌ای کـه در خارج نخستین خط راست واقع باشد، نمی‌تواند برابر باشد. معادلهٔ

$$y = x$$

به طورکامل خصوصیت، نقطه‌های واقع براین خط، وتنها همین‌نقطه‌هارا، نشان می‌دهد. بنابراین، حق داریم بگوییم که این معادله، عبارتست از معادلهٔ خط راست ما .

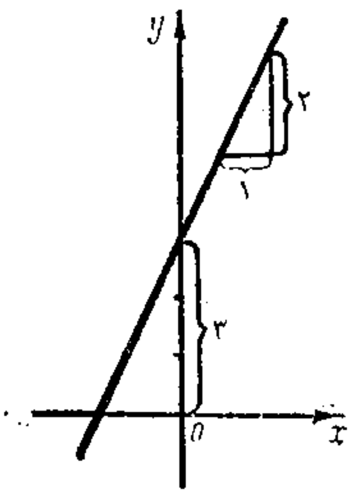
ضمن کار، توانستیم معادلهٔ هرکدام از دوخط دیگری را هم که رسم کردیم، کشف کنیم. برای شیب ۱ : ۲، معادله خط راست چنین‌است:

$$y = ۲x$$

(واگربه یاد داشته باشید، ماپیش ازاینهم، با این معادله‌سروکارداشتیم) وبرای شیب (۱-) : ۱:

$$y = -x$$

حالا، خط راستی را کـه شیبی برابر با ۱ : ۲ داشت، انـدکی، و مثلاً به اندازهٔ ۳ واحد ، بالا می‌بریم؛ به‌نحوی که‌جهت خط‌راست‌تغییر نکند:



شیب این خط هم، تعییر نمی‌کند. برای اینکه در این مورد قانع شویم، می‌توان از نقطهٔ دلخواهی واقع برآن، به‌اندازهٔ یك واحدبه‌طرف راست رفت. دراینصورت می‌بینیم که شیب به اندازهٔ دو واحد بالارفته است. تنها اختلافی که این خط راست درمقایسه بـا حالت نخستین خود دارد، در اینست که هر نقطهٔ آن، به اندازهٔ ۳ واحد، بالاتر رفته است، یعنی عرض هر نقطهٔ آن، ۳ واحد بیشتر است. آن y ، که قبلاً برابر با ۲x بود، حالا برابر با ۳+۲x می‌شود؛ بنابراین، معادلهٔ خط راست، در اینحالت، چنین می‌شود:

$$y=۲x+۳$$

خاصیت مشترك همهٔ معادله‌هایی که تا اینجا بدست آورده‌ایم:

$$y=x;\quad y=۲x،\quad y=-x;\quad y=۲x+۳$$

اینست که همهٔ آنها، درجهٔ اول ودومجهولی هستند. به این مناسبت با دو مجهول سروکار داریم ، که هرنقطه، با دو مختص بیان می‌شود.

این موضوع خیلی مهم است کـه می‌توان به طور روشنی نشان داد که خط راست، در هر وضعی که باشد ، همیشه متناظر با یك معادلهٔ درجهٔاول است. عکس این حکم هم درست است: می‌توان ثابت کرد که هـر معادلهٔ درجه اول دو مجهولی،بـه هـر شکلی کـه نـوشته شود، و مثلاً معادلهٔ

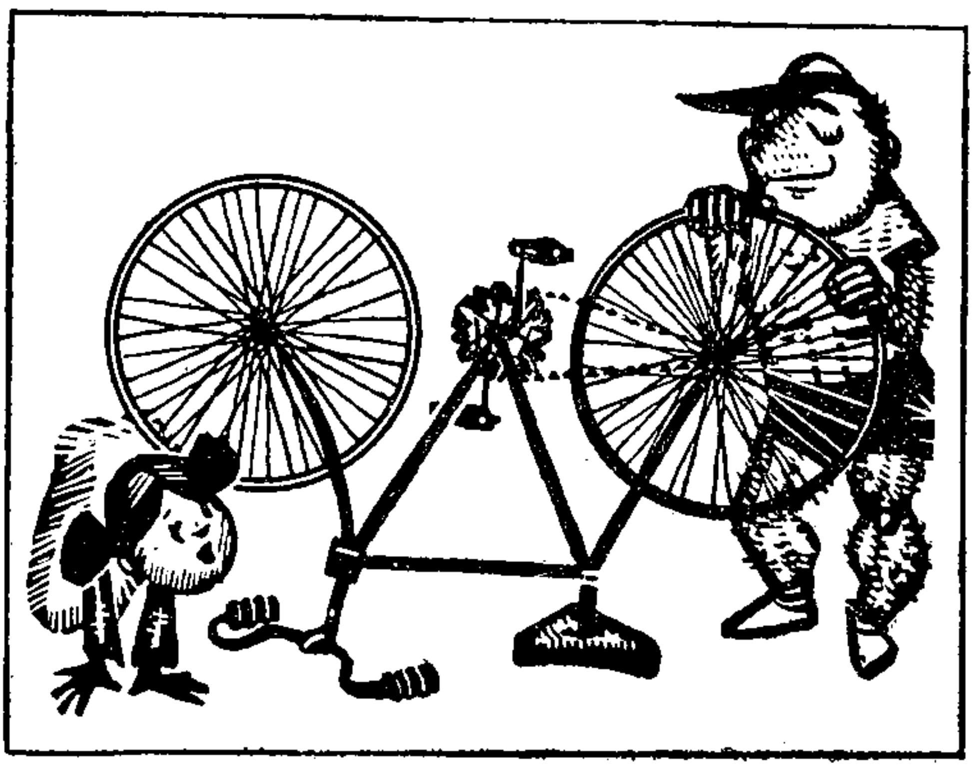
$$۵x-۳y=۷$$

همیشه می‌تواند به‌عنوان معادلهٔ خط راست مشخصی، درنظرگرفته‌شود.

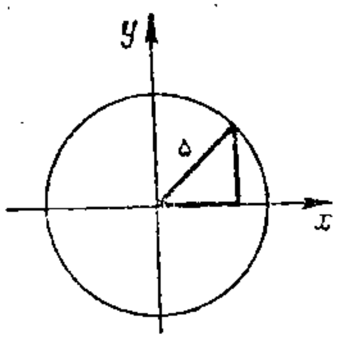
معادلهٔدرجه اول وخط راست، تنها، دوشکل متفاوت ازتصوریك مفهوم واحد هستند.

این، یك‌نتیجهٔ بسیار زیباست، ولی در آن هیچ چیزشگفت‌آوری وجودندارد. با اینکه، تعداد روشهایی که‌به‌کمك آنها بتوان خطهای راست رانشان داد، به حساب نمی‌آید، خط راست همیشه خط راست‌است وهمهٔ آنها به یك خانواده تعلق دارند. بنابراین، کاملاً طبیعی است که معادله‌های آنها هم؛ خانوادهٔ مشخصی از معادله‌ها را تشکیل دهند.

حالا، به حالتی از خط‌منحنی می‌پردازیم. کسی نیست که دایره‌را نشناسد! به عنوان مثال، چرخ دوچرخه‌ای را در نظر بگیرید که دارای مجموعه‌ای از پره‌هاست که طولهایی برابر دارند . این پره‌ها ، چیزی جز همان شعاعهای دایره نیستند:



فرض کنید که طول هرشعاع، برابر با ۵ واحد طول باشد و ضمناً مرکز دایره، برمبداء دستگاه مختصات واقع باشد:



اگرنقطه‌ای از محیط دایره را انتخاب کنیم، مختصات این‌نقطه، و شعاعی را که ازآن می‌گذرد، رسم کنیم، مثلث قائم الزاویه‌ای بدست می‌آیدکه شعاع دایره، وترآن ومختصات نقطه، ضلعهای‌پهلوی زاویهٔ قائمهٔ آنرا تشکیل می‌دهند.

رابطه‌ای را که بین ضلعهای یك مثلث‌قائم‌الزاویه وجود دارد، وماآنرابا نام قدیمی قضیهٔ فیثاغورث‌می‌شناسیم، به یادبیاوریم: مجموع مجذورهای دوضلع پهلوی زاویهٔ قائمه، برابر است با مجذور وتر. اگر هرکدام ازمختصات یك نقطهٔ دلخواه از محیط دایره را مجذور کنیم، و سپس این مجذورها را با هم جمع کنیم، عدد $۲۵ = ۵^۲$ بدست می‌آید:

$$x^۲ + y^۲ = ۲۵$$

وهمین، معادلهٔ دایرهٔ ماست. بلافاصله دیده‌می‌شود که این ، یك معادلهٔ درجه دوم است، وآنهم نه ساده‌ترین‌آنها.

به منحنی می‌پردازیم که متناظر با ساده‌ترین معادلهٔ درجه دوم یعنی معادلهٔ

$$y = x^۲$$

باشد. داریم:

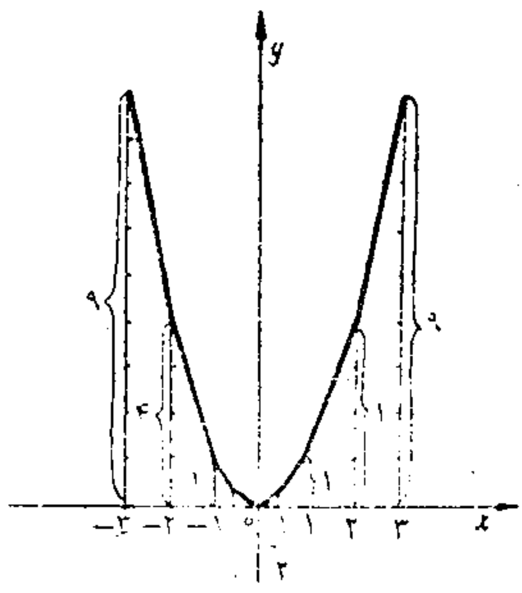
$$x = -۳, \qquad y = (-۳)^۲ = ۹;$$
$$x = -۲, \qquad y = (-۲)^۲ = ۴;$$
$$x = -۱, \qquad y = (-۱)^۲ = ۱;$$
$$x = ۰, \qquad y = ۰^۲ = ۰;$$
$$x = ۱, \qquad y = ۱^۲ = ۱;$$
$$x = ۲, \qquad y = ۲^۲ = ۴;$$
$$x = ۳, \qquad y = ۳^۲ = ۹$$

نقطه‌های بینابینی را هم، دست‌کم در نزدیکیهای صفر، انتخاب می‌کنیم:

$$x = \frac{۱}{۲}, \qquad y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴};$$

$$x = -\frac{۱}{۲}, \qquad y = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

آنچه که پیدا کرده‌ایم، به روی شکل می‌بریم:



منحنی که بدست می‌آید، پس از آنکه خط شکسته به‌صورت کاملاً هموار درآید، سهمی نامیده می‌شود. روشن است که هردو نیمهٔ آن به سمت بینهایت می‌رود، ضمناً شیب آن مرتب تندتر به خط راست قائم شبیه‌تر می‌شود. همانطور که می‌بینیم، این منحنی، هیچگونه شباهتی با دایره ندارد.

ما قبلاً هم با یك منحنی برخورد کرده بودیم که معادله‌ای از درجهٔ دوم داشت، منتهی ممکن است که متوجه آن نشده باشید. منظور من هذلولی است. معادلهٔ هذلولی را به اینصورت نوشته بودیم:

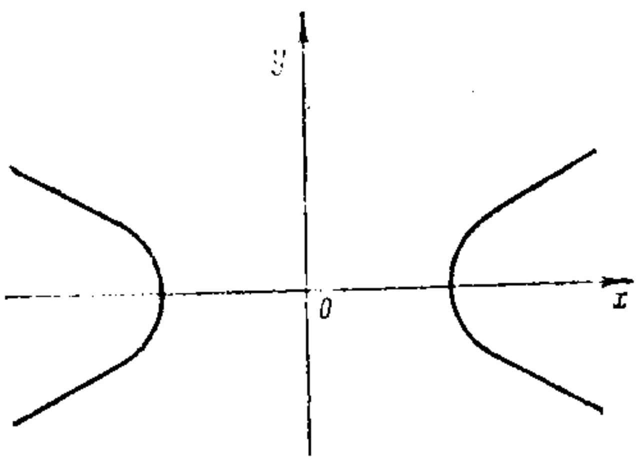
$$y = \frac{۱۲}{x}$$

ولی، اگر دو طرف معادله را در x ضرب کنیم، بدست می‌آید:

$$x \cdot y = ۱۲$$

ما، حاصلضرب $x.y$ را هم، که در آن مجموع نماهای دوعامل ضرب، برابر ۲ می‌شود، درجهٔ دوم به‌حساب می‌آوریم.

اگر کسی دراین مورد، کاملاً قانع نشده باشد، من می‌توانم شاخه‌های هذلولی را به سادگی به چرخانم تا به وضع زیر درآیند:

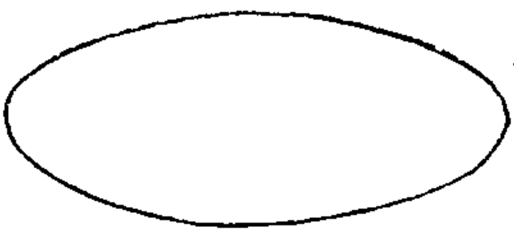


در اینصورت، معادلهٔ آن به صورت

$$x^2 - y^2 = 14$$

در می‌آید. که دیگر هیچکس در درجه دوم بودن آن، شك نمی‌کند.

من می‌خواهم تنها یادآوری کنم که معادلهٔ دایرهٔ پهن شده‌هم، که بیضی نامیده می‌شود، یك معادلهٔ درجهٔ دوم است:



منحنیهای دیگری‌که دارای این خاصیت باشند (یعنی معادلهٔ‌آنها از درجهٔ دوم باشد)، وجود ندارد.

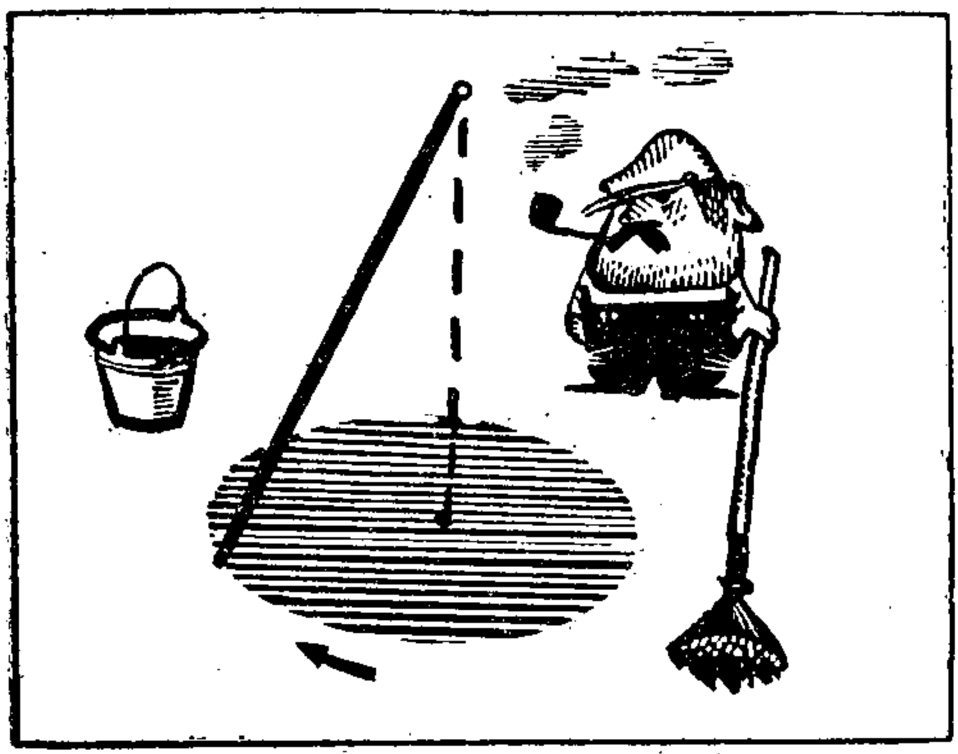
اگر این چهارنوع منحنی را، به صورتهای مختلف، نسبت بـه دستگاه مختصات، رسم کنیم، خانواده‌ای از منحنیها بدست می‌آید که از بین همهٔ نوعهای ممکن معادله، متناظر با معادلهٔ درجهٔ دوم هستند. به زحمت می‌توان خانواده‌ای را پیدا کرد ، که عضوهای آن تا به این حد، نسبت به هم بی‌شباهت باشند. کدام بستگی خونی است که همهٔ‌این منحنیها را به هم مربوط کـرده است، منحنیهایی کـه در بین آنها هم شکلهای محدود وجود دارد وهم شکلهایی‌که به‌سمت بینهایت میل می‌کنند، هم شکلهای بسته وهم شکلهایی کـه ازدوشاخهٔ جدا گانه تشکیل شده است؟

اگر همهٔ عضوهای این خانواده را با هم در نظر بگیریم، برایمان

روشن می‌شود که بر چه اساسی، گردهم آمده‌اند. این منحنیها، یك نام مشترك دارند: مقطع مخروطی یا منحنیهای مخروطی.

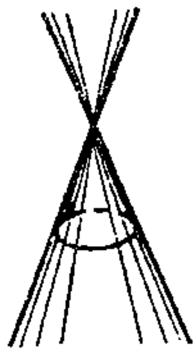
حالا، دوباره از صفحه بیرون می‌رویم و به فضا توجه‌می‌کنیم. والبته، خیلی باعث تأسف است که ما نمی‌توانیم، همانگونه که در صفحهٔ کاغذ شکلی را رسم می‌کنیم، در فضا هم به رسم کردن‌بپردازیم!

با وجود این، پیش‌خود تصور کنید که‌داریم هوا را رنگ می‌کنیم. در هوا، یك دایرهٔ افقی و خط راستی در بالای مرکز آن، به طور مایل، قرارگرفته است، به‌نحوی‌که این خط راست، درنقطه‌ای، برکنارهٔ دایره مماس باشد:

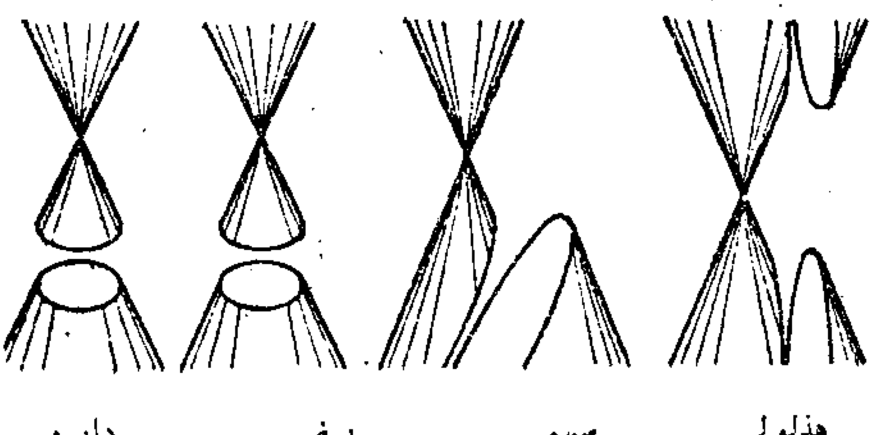


همچنین، پیش خود تصور کنید که‌این خط راست‌رادر «رنگ سحرآمیزی» فرو برده باشم. حالا، نقطه‌ای ازاین خط راست را که درست بالای‌مرکز

دایره قرار گرفته است ، با یك دست محکم می‌گیریم، وبادست دیگر ، نقطه‌ای از خط راست را می‌گیریم که درآنجا با محیط دایره‌تماس‌حاصل کرده است، وآنرا دور دایره می‌چرخانیم. در اینصورت، خط راست رنگی، چه دربالای نقطهٔ ثابت (که درست در مقابل مرکز دایره بود) و چه در زیر آن، سطحی را رسم می‌کند که سطح مخروطی نام دارد:



حالا، اگرسطح مخروطی دو دامنه‌ای را، که‌به این ترتیب بدست می‌آید، به وسیلهٔ صفحه‌ای که درجهتهای متفاوت قرارگرفته است، قطع کنیم، در مقطع، همان چهار منحنی‌ما بدست می‌آید:



هذلولی سهمی بیضی دایره

تنها یکی از صفحه‌ها، مخروط بالایی را هم قطع می‌کند.

اگر هم، خویشاوندی هندسی را، که بین این چهار منحنی وجود دارد. کشف نمی‌کردیم، تنها همین موضوع که همهٔ آنها را می‌شود با معادلهٔ درجهٔ دوم بیان‌کرد، به ما یاری می‌داد تا بسیاری از خاصیتهای مشترك آنها را، پیدا کنیم. در این مورد کافی است ببینیم که جبر، دربارهٔ این معادله‌ها چه می‌گوید وچه نتیجه‌هایی از آن بدست می‌آید، به این ترتیب، توانسته‌ایم خاصیتهای مشترك این چهار منحنی را پیدا کنیم.

مثلاً ببینیم در بارهٔ برخورد این منحنیهابا یك خط راست، چه می‌توان گفت . نقطهٔ برخورد، به نقطه‌ای گفته می‌شود که درعین‌حال، هم روی منحنی مفروض وهم روی خط راست واقع باشد. بنابراین ، مختصات این نقطه، باید درمعادله‌های هردوخط، صدق کند. معادلهٔ خط راست،یك معادلهٔدرجه‌اول‌است،وجبرمی‌آموزدکه دومعادلهٔ دومجهولی، وقتی که یکی از آنها درجهٔ اول ودیگری درجهٔ دوم باشد:

یا جوابهای مشترك حقیقی ندارند،

یا یك جواب مشترك دارند،

ویا دو جواب مشترك دارند.

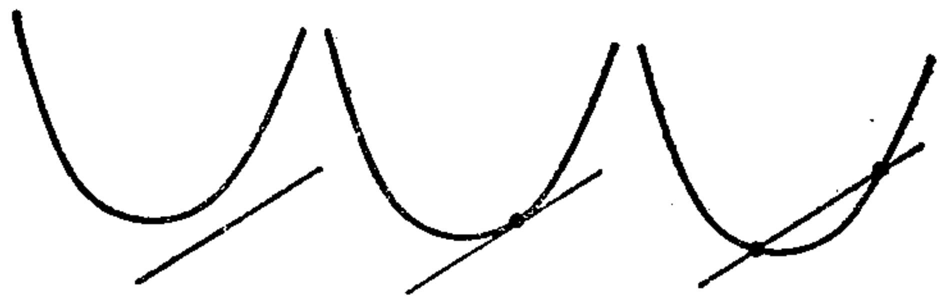
ازاینجا، برای هرکدام از منحنیهای مخروطی ما، می‌توان نتیجه گرفت که خط راست، نسبت به آن، یکی از این سه وضع را دارد:

یا اصلاً این منحنی را قطع نمی‌کند،

یا در یك نقطه با آن مشترك است،

ویا آنرا در دونقطه قطع می‌کند:

خط راست، حتی هذلولی را،که دارای دوشاخهٔ جداگانه است،نمی‌تواند



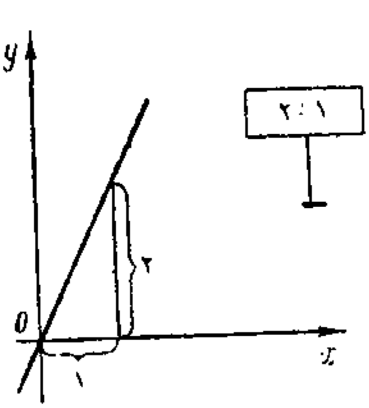
در بیش از دو نقطه قطع کند.

چنین است کمکی که جبر می‌تواند به هندسه بکند!

ضمیمه‌ای دربارهٔ موجها وسایه‌ها

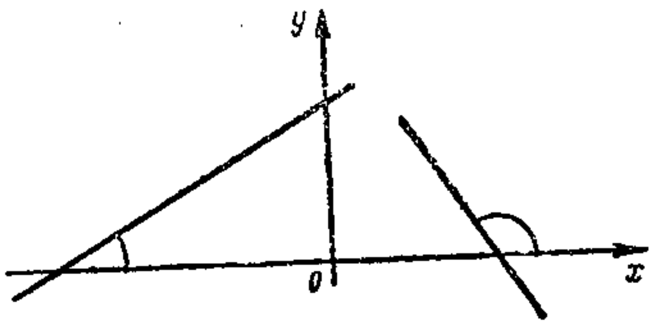
در استدلالهایی که کردیم، دو نکتهٔ هندسی وجودداشت و من نمی‌خواهم، بدون اینکه آنها را روشن کنم، این قسمت را تمام‌کنم.

نکتهٔ اول، مربوط به روشی‌بود که به یاری آن،جهت خط راست را معین می‌کردیم. گفتیم که این جهت را می‌توان با استفاده از نسبت ارتفاع بر راهی که روی خط افقی طی‌شده است ، بدست آورد، یعنی با استفاده ازنسبت یك ضلع‌مجاوربه زاویهٔ قائمهٔ، در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که پیدا می‌شود، برضلع دوم مجاور به زاویه قائمه:



اگر ما بگوییم که خط راست مورد نظر، با جهتی که از پیش

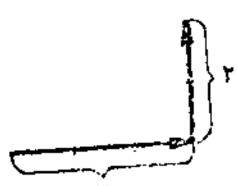
معلوم شده است، چه زاویه‌ای می‌سازد، بـازهم جهت خط راست، معلوم خواهدبود. معمولاً، این زاویه رانسبت به جهت مثبت محور x ،معین می‌کنند. ما، این زاویه را، زاویهٔشیب خط راست می‌نامیم . وقتی که خط راست رو به بالا می‌رود، این زاویه حاده است، ووقتی که خط راست‌به طرف پایین می‌آید، منفرجه.



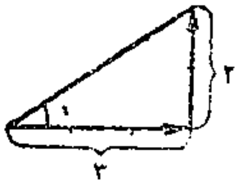
نسبت دوضلع مجاور به زاویهٔ قائمه هم، همان جهتی را معین می‌کند، که از راه زاویهٔ شیب بدست می‌آید، بنابراین ، نسبت ایـن دو ضلع را می‌توان به عنوان اندازهٔ مقدار زاویه، در نظر گرفت.

به زاویهٔ حاده‌ای توجه می‌کنیم که متناظر با شیب ۳ : ۲ است: این، به معنای آنست که اگر از نقطهٔ دلخواهی واقع بریك ضلع زاویه، عمودی برضلع دیگر فرودآوریم، مثلث قائم‌الزاویه‌ای بدست می‌آیدکه درآن، نسبت ضلع روبروی به این زاویه، برضلع دیگر مجاور به زاویهٔ قائمه، برابر است با ۳:۲ ویا $\frac{۲}{۳}$.

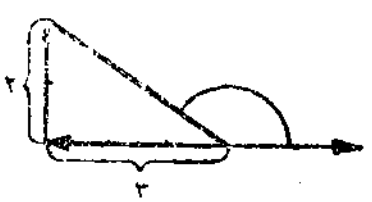
اگر ایـن نسبت $\frac{۲}{۳}$داده شده‌باشد، می‌توان بلافاصله زاویه رارسم کرد. ۳ واحد به طرف راست می‌رویم وسپس ۲ واحد به طرف بالا:



اگر نقطه‌ای را که در بالا به‌آن رسیده‌ایم، به نقطهٔ آغاز حرکت، وصل کنیم، زاویهٔ مورد نظر ساخته می‌شود:



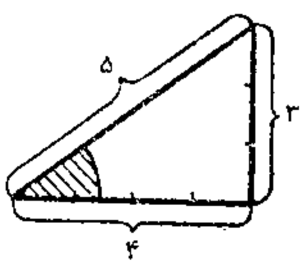
در حالتی که با زاویهٔ منفرجه سروکار داشته باشیم ، شیب ما ، رو به پایین است و می بینیم که نسبت متناظر آن، منفی می‌شود. دراین مورد هم، دستور العمل، تفاوت نمی‌کند. اگر، این نسبت برابر با $-\frac{۲}{۳}$ باشد، باید ۳ واحد به طرف چپ و سپس ۲ واحد به طرف بالا برویم و بعد نقطه‌ای را که به آن رسیده‌ایم، به نقطهٔ آغاز حرکت، وصل کنیم و روشن است که در اینصورت، زاویهٔ منفرجه بدست می‌آید (این زاویه منفرجه، بین جهت مثبت امتداد نخستین وخطی که باوصل دو نقطه به یکدیگر، بدست‌آورده‌ایم، قرار دارد؛ زیرا همیشه زاویهٔ یك خطراباجهت مثبت محور x ، در نظر می‌گیریم):



چنین زاویه‌ای نمی‌تواند در داخل یك مثلث قائم الزاویه‌قرارگیرد. ولی در سمت چپ آن، مثلث قائم الزاویه‌ای وجود دارد که نسبت دوضلع مجاور به زاویهٔ قائمه آن برابر است با $\frac{۲}{۳}$.واین همان نسبتی است که زاویهٔ‌منفرجهٔ مارا،منتهی بدون‌توجه‌به علامت آن، مشخص می کند.

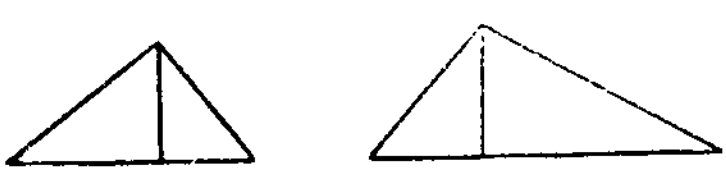
تابعهای مثلثاتی

می‌توان ثابت کرد کـه نسبت هر دوضلع دلخواه از یـك مثلث قائم‌الزاویه ، دقیقاً به وسیلهٔ زاویـه‌های آن مشخص می‌شود. اینگونـه نسبتهای دوضلع‌را که به زاویه‌های مورد بررسی بستگی دارد،تابعهای زاویه ویا تابعهای مثلثاتی گویند. آن تابع مثلثاتی کـه مـا هم اکنون آنرا بررسی می‌کردیم، تانژانت نام دارد. نسبت ضلع روبروی به زاویهٔ مفروض بروتر را سینوس زاویه، ونسبت ضلع مجاور زاویه بـه وتر را کسینوس زاویه گویند. مثلا در مثلث

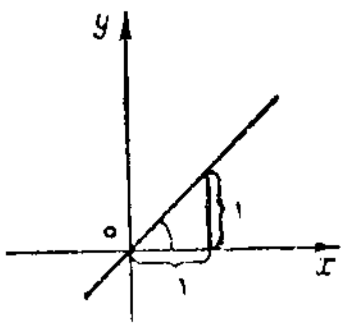


سینوس زاویه‌ای کـه‌هاشورزده‌ایم ، برابر بـا $\frac{۳}{۵}$ وکسینوس ایـن زاویـه برابر با $\frac{۴}{۵}$ است.

هرکدام‌از تابعهای مثلثاتی را می‌توان‌در حالتهایی هم که زاویهٔ ما، بیشتر از زاویـهٔ حاده است، تعریف کـرد. مقادیر تابعهای مثلثاتی مربوط به‌زاویه‌های مختلف را، درجدولهای خاصی، منظم کرده‌اند.اگر ضلعهای یك مثلث قائم‌الزاویـه را بدانیم‌ـ وضمناً معلوم است کـه هر مثلث دیگری را هم می‌توان به صورت دومثلث قائم‌الزاویه درآورد، ـ



کافی است به جدول مراجعه کنیم تا بدانیم که زاویه‌های مثلث چقدر است. درست‌است که اگر ضلعهای مثلثی معلوم باشد، می‌توان‌آنرارسم کرد وبعد زاویه‌های آنرا اندازه‌گرفت. ولی، دقتی‌که‌از راه‌اندازه‌گیری بدست می‌آید، بسیار کمتر از دقتی است‌که به کمك محاسبه وبامراجعه به اینگونه جدولها، در دسترس، قرار می‌گیرد. کاملاً اشتباه است، اگر گمان کنیم‌که مؤلف این جدولها، از راه اندازه‌گیری، این عددها رادر برابرماگذاشته‌است. محاسبهٔ‌تابعهای مثلثاتی‌ممکن است، دست‌کم به این علت‌که‌مابعضی ازمقادیراین‌تابعهارا به طوردقیق‌می‌دانیم. مثلا،نخستین خط راستی را که رسم کرده بودیم، زاویه قائمه را به دوقسمت برابر، تقسیم می‌کند:

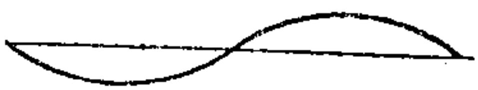


ودر نتیجه تانژانت زاویهٔ شیب آن برابر است با ۱:۱ یعنی ۱.

زاویهٔ‌قائمه، درست‌برابربا یکچهارم دوران‌کامل است وبنابراین، ما دیگر می دانیم که تانژانت زاویهٔ یك هشتم دوران کامل، برابر است باواحد. وقتی‌که ما، تابعهای مثلثاتی بعضی از زاویه‌ها را بدانیم، می‌توان این پرسش را کردکه: چگونه باتکیه به‌این نتیجه‌ها، می‌توان‌تابع مثلثاتی مجموع‌زاویه‌ها، یادوبرابریا نصف یك زاویه را پیدا کرد؟پاسخ به این پرسشها ومحاسبه‌هایی از اینگونه، مربوط به مثلثات است . با وجود این، درزمان ما، جدولها را باروش دیگری محاسبه می‌کنند، وما

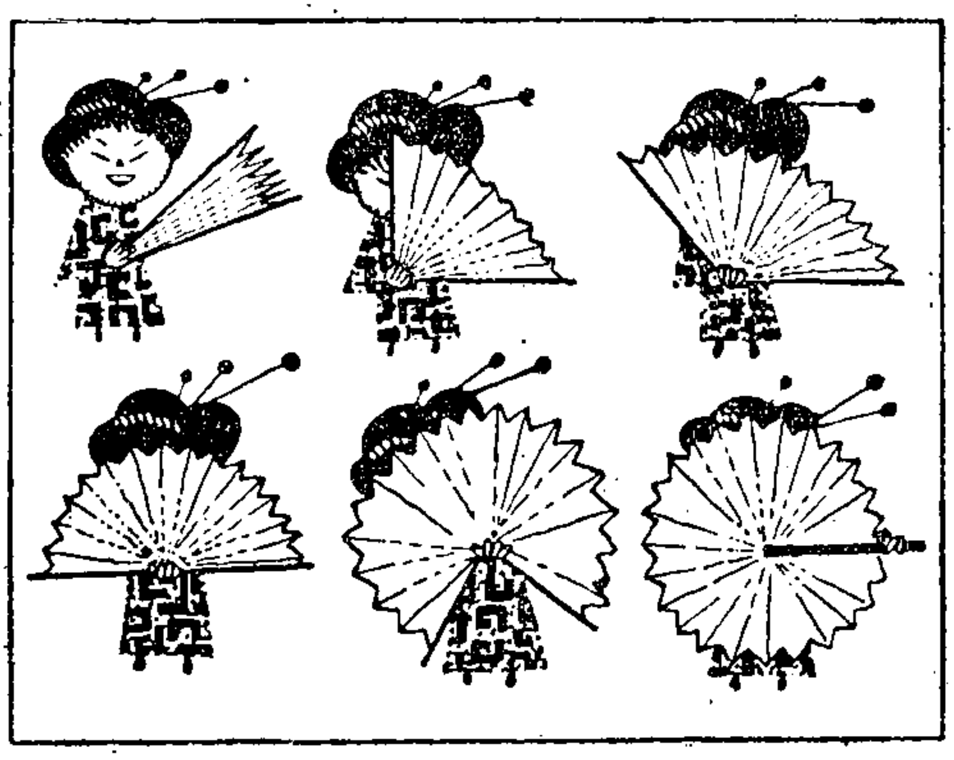
هم دو باره به‌این پرسش برخواهیم گشت.

اهمیت تابعهای مثلثاتی، ازچارچوب هندسهٔ، خیلی دورتر می‌رود. مثلا، اگر «منحنی مثلثاتی» را برای سینوس رسم کنیم، به نحوی که زاویهٔ آن از ۰ تا یک دوران کامل، تغییر کند، این منحنی موجدار را بدست می آوریم:

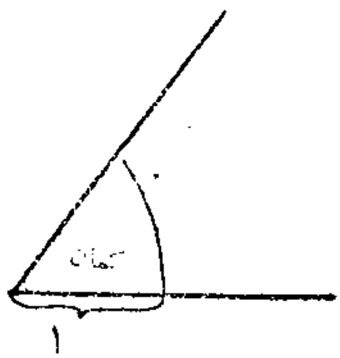


این منحنی را می‌توانیم تا هر جاکه بخواهیم ادامه دهیم. زاویه، با محاسبهٔ انحراف یك خط راست، نسبت به خط راست دیگری که ثابت است، اندازه گرفته می‌شود.

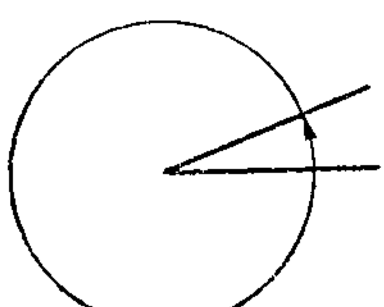
مثلا، فرض کنیم که یك بادبزن ژاپنی را به تدریج بازکنیم:



روی شکل ، تمام حالتهای ممکن یك زاویه، نشان داده شده‌است.
روشن است که مقدار دوران را، به‌کمك طول کمانی هم که، دو ضلع زاویه را به‌هم پیوسته است، می‌توان اندازه گرفت. واینهم روشن است که طول‌کمان بستگی به طول شعاع بادبزن دارد. ما، زاویه‌ها راباطول کمانی از دایره اندازه می‌گیریم که برابربا شعاع آن باشد، یعنی طول کمانی‌را که‌برابرباطول شعاع همان دایره باشد،واحدبه‌حساب‌می‌آوریم :



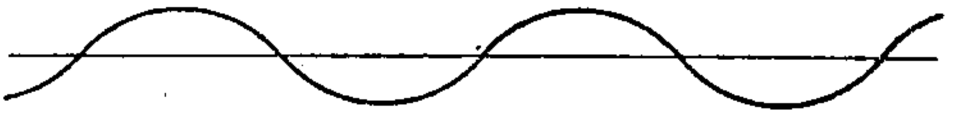
(این واحد اندازه‌گیری، خیلی راحتتر از واحد درجه است‌که درمدرسه یادگرفته‌ایم). می‌توان پیش خود تصور کرد که وقتی خط راست دور کامل خود را زد، از حرکت بازنایستد ودوران را ادامه دهد:



به‌نحوی‌که‌راهی‌راکه‌بین دوخط راست نشان داده‌ایم،برای‌بار دوم، طی کند. روشن است که خط راست در همان وضعی‌قرار می‌گیرد که تنها زاویهٔ کوچك را درست کرده بود:



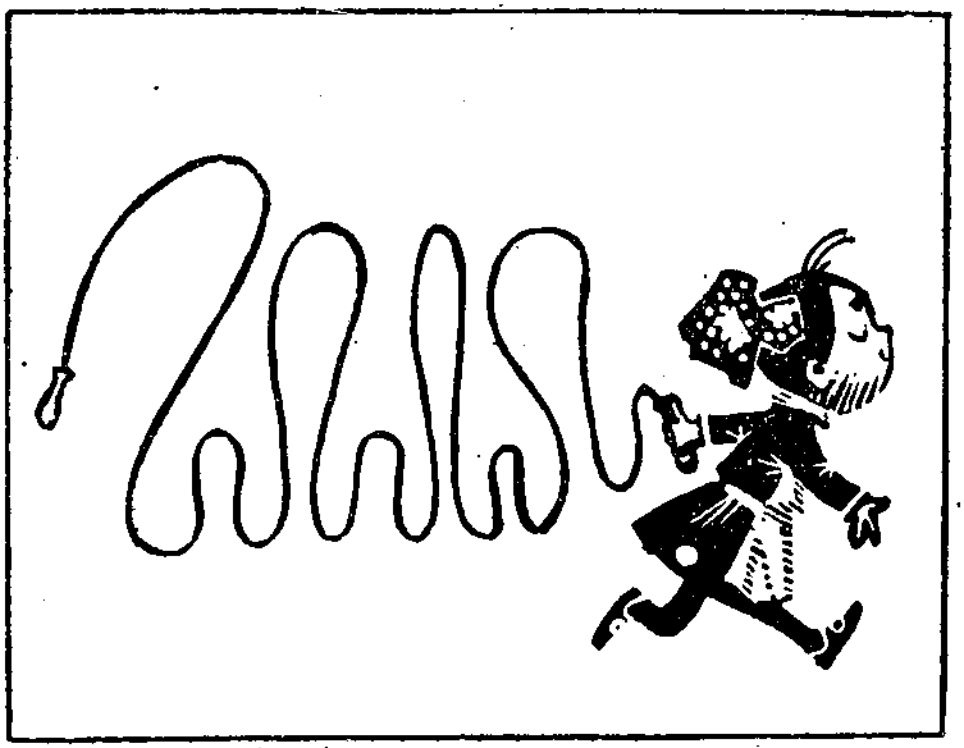
بنابراین، مقادیر تابعهای مثلثاتی، برای زاویه‌هایی که از یك دوران کامل بزرگترند، تکرار می‌شود و در نتیجه، شکل منحنی هم تکرار می‌شود:



و این خیلی شبیه به دورهٔ تکراری است که در تبدیل به کسرهای دهدهی پیش می‌آید و به همین مناسبت است که می‌گوئیم سینوس، یك تابع دوره‌ای (متناوب) است.

تقریب تابعهای دوره‌ای

هرفیزیکدانی با این منحنیها آشناست. این منحنیها، که به‌صورت «تصویرهای» نوسانی هستند، در فیزیك امروزی، اهمیت زیاری دارند:



اگر خواننده، کم وبیش به رادیو علاقمند باشد؛ ممکن نیست به چنین تصویرهایی‌باموجهای «موزون»برخوردنکرده باشد.

موجهای انبوه، مربوط به موجهای‌به اصطلاح الکترو مغناطیسی هستند. صورت خالص این موجها، چنین شکلی دارند :



ولی، درحالت مورد نظرما ، آنها به صورت موجهای کشیده‌تر صوتی هستند:



همچنین می‌توان به موجهایی برخورد که از ترکیب هردونوع به‌وجود آمده باشند. درواقع، خود موجهای صوتی هم، به این سادگی نیستند. صداهایی که مطلقاً صاف ویکنواخت باشد، وجود ندارد ، ولی اختلاف بین آنها آنقدر زیاد، ومثل اختلاف بین موجهای الکترومغناطیسی و موجهای صوتی، نیست. واین اختلاف کم موجها هم، نمی‌تواند نقش زیادی داشته باشد. این موجهای تغییر شکل یافته را می‌توان به چنین صورتی دید:



اغلب لازم می‌شود موجهای جداگانه‌ای‌که این موج ناموزون‌را تشکیل داده‌اند «بخوانیم». به طور طبیعی، این پرسش پیش می‌آید: وقتی

که‌رو به روی ما یك منحنی پیوسته قرارگرفته است که به‌نحوی تغییر شکل پیدا کرده است وضمناً می‌دانیم که یك منحنی دوره‌ای است، آیا نمی‌شود، موجهای ساده‌ای پیدا کرد که کار مشترك آنها، ایـن منحنی را به ما بدهد؟

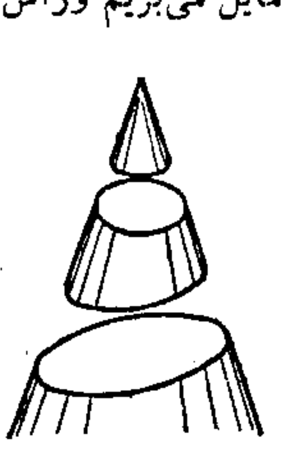
پاسخ چنین است: گرچه نمی‌توان به چنین هدفی بـادقت مطلق رسید، ولی می‌توان موجهایی را پیدا کرد که بـا قراردادن آنها روی یکدیگر، به‌تقریب به‌منحنی خودمان برسیم. حتی می‌توان بـاقراردادن خطهای شکسته‌ای، به این شکل، به منحنی مورد نظر خود نزدیك شد:



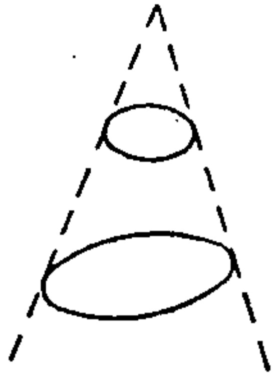
این مطلب را می‌توان، بازبان تابعها، ثابت کرد. دراینصورت، دیگر به جای موجها، باتابعهای مثلثاتی متناظر آنها ، سروکار خواهیم داشت. نکتهٔ هندسی دوم، مربوط به مقطعهای مخروطی است.

هندسهٔ تصویری

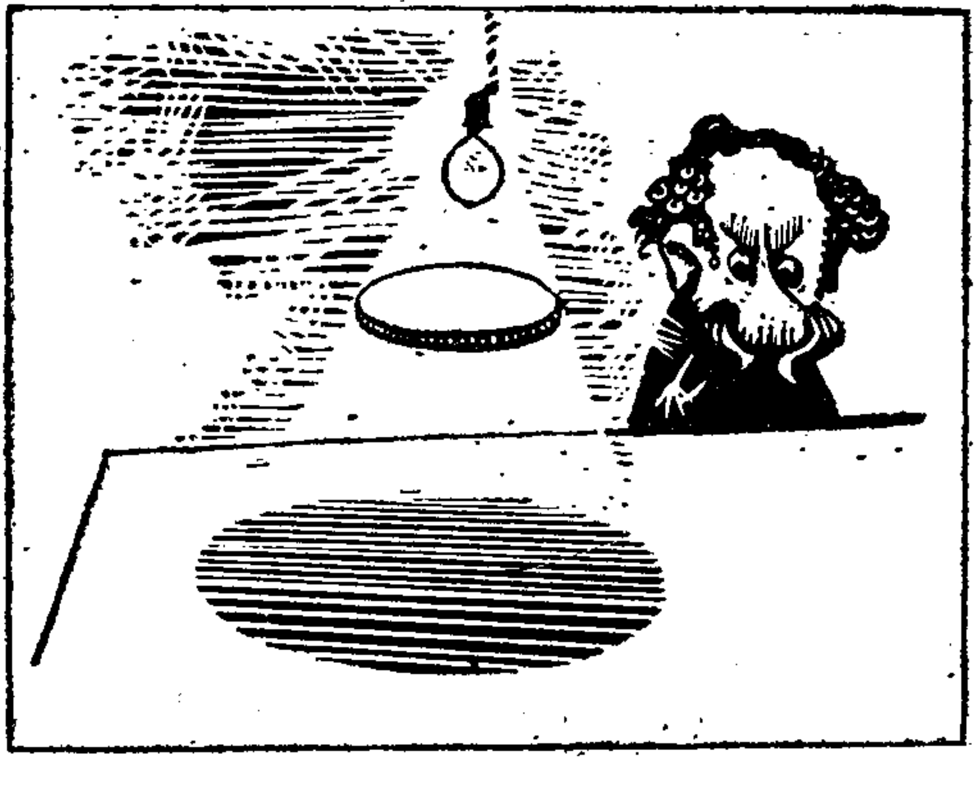
دوباره به سطح مخروطی برمی‌گردیم و ابتدا آنرا با یـك صفحهٔ افقی، وسپس بایك صفحهٔ مایل می‌بریم ورأس مخروط، دایره وبیضی‌را،



به‌طور جداگانه رسم می‌کنیم:



حالا، فرض می‌کنیم که به جای رأس مخروط، لامپ کوچکی قرار گرفته باشد که نورخود را به هرطرف پخش کند. ضمناً فرض می‌کنیم که دایره از یك قطعه کاغذ تیره‌ای درست شده باشد، که‌نور را از خود عبور ندهد. شعاعهای نور ازکناره‌های دایره می‌لغزد وسطح مخروطی را



به‌وجود می‌آورد. درنتیجه، خود دایره، روی صفحهٔمایلی که زیرآنست، سایه‌ای به شکل بیضی می‌اندازد.

بیضی را می‌توان به عنوان سایـهٔ دایره درنظر گرفت: بیضی را می‌توان به‌عنوان تصویر یك دایره، از یك نقطهٔ معلوم، برصفحه‌ای مایل بدست آورد.

اگرشیب صفحهٔ مایل‌را بیشترکنیم، همین‌تصویر، سایه‌ای به‌شکل سهمی یا هذلولی می‌دهد (اگربخواهیم شاخهٔ دوم هذلولی را پیدا کنیم، باید در امتداد شعاعهای نور به‌طرف بالا برویم ودر آنجا دایرهٔ دومی‌را هم در نظر بگیریم). معلوم مـی‌شود کـه سایه می‌تواند بـه‌کلـی تغییر شکل بدهد.

هندسهٔ تصویری، به‌قسمتی‌ازهندسه گفته‌می‌شود که‌خاصیتهایی‌ازشکل را، که‌حتی‌با تغییر کردن شکل آن به وسیلهٔ‌تصویر،بدون‌تغییر می‌ماند، مورد بررسی قرار می‌دهد. می‌توان خاصیتهای تصویری را جستجو کرد که ضمن تصویر، بدون تغییر باقی می‌ماند. بـه‌این ترتیب، مـا خواهیم توانست مقطعهای مخروطی را، به‌کمك شکلهای زیبای دایره، که ازقبل می‌شناختیم، بررسی کنیم. همهٔ خاصیتهای تصویری دایره، در بارهٔ سایر مقطعهای مخروطی هم درست است، زیـرا آنها چیزی جز تصویر همین دایره نیستند . سایهٔ شکل مخروطی می‌تواند تا خود بینهایت ادامه پیدا کند، بدون اینکه بتواند از میزبان خودش جدا شود.

۱۵. اجزاء «هایکه»

همه ازداستان یوری تینیانو به نام « سروان هایکه »اطلاع دارند. موضوع داستان‌براین اساس است‌که میرزای تازه‌کار،که‌فرمان‌امپراطور

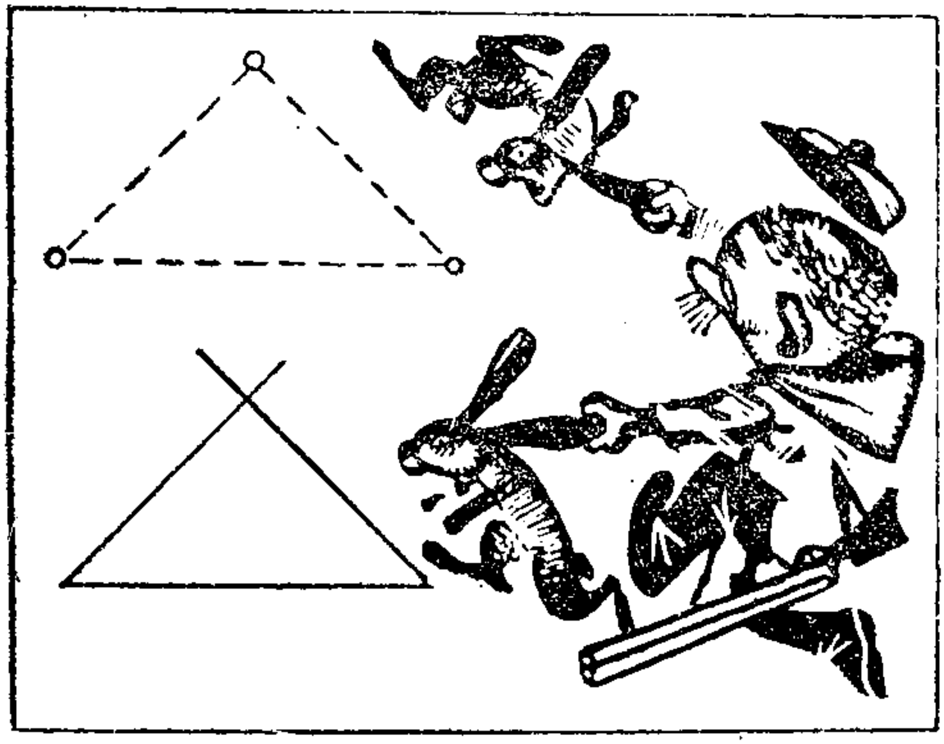
پاول اول را برای هنگی‌که تازه تشکیل شده‌بود می‌نوشت، اشتباهی کرد ونام «سروان هایکه» را در لیست خود وارد کرد. این اشتباه، از آنجا پیش‌آمده بودکه میرزا، زیرلب، واژهٔ «سروانهایی که» راتکرارمی‌کرد. چون نامه، فرمان یك شاه مستبد بود، هیچکس‌جرأت نکرد به او اظهار کند که افسری به نام هایکه ، در دنیا وجود ندارد. «سروان هایکه» ، کسی نبود وتنها ناشی از یك سهوقلم بود. در این بین، شایعه پراکنی‌و ومهمل گویی دربارهٔ «سروان هایکه» رواج پیدامی‌کند: اورادرزندان می نشانند. اورا صاحب زن وحتی بچه می‌پندارند، ترحم‌بعضی وخشم‌بعضی دیگر را برمی‌انگیزدودر هرجابه‌صورت پدیده‌ای درمی‌آیدکه درزندگی روزمرهٔ مردم، تأثیر می‌گذارد.

خط راست دربینهایت

ازنوع اجزاء غیرواقعی هایکه ،که وجود ندارند، ولی می‌توانند نقشی مهم داشته باشند، در ریاضیات هم پیدا می‌شود، که آنها را در ریاضیات، اجزاء ایده‌آلی‌گویند.ازاینگونه، می‌توان‌مثلاً نقطهٔبینهایت‌دور را نام برد که در آنجا دو خط موازی به هم می‌رسند. بدون این نقطه نمی‌توان ساختمان هندسه را به پایان رساند.

در واقع، می‌توان ثابت‌کردکه رابطهٔ بین نقطه‌ها وخطهای‌راست، یك رابطهٔ دو طرفه است: اگر دربعضی از حکمهایی که به نقطه و خط راست مربوط می‌شود، واژهٔ «نقطه» را به واژهٔ «خط راست» تغییردهیم و برعکس‌به‌جای‌واژهٔ«خط راست»، واژهٔ «نقطه» رابگذاریم، بازهم‌به حکمی درست می رسیم. نمونه‌ای بیاوریم.سه نقطه‌ای‌که بریك‌خط راست، واقع نباشند،یك‌مثلث رامعین می‌کنند.دراین تعریف،تردیدی وجودندارد.بیان

طرف مقابل می‌گوید: سه خط راستی که ازیك‌نقطه عبورنکنند،یك‌مثلث را معین می‌کنند:



این دو طرفه بودن، خیلی کار را ساده‌می‌کند. ولی آیا این درست است که: حکمی را ثابت‌کنیم و بلافاصله، حکم خویشاوندآنرانتیجه‌بگیریم؟ معلوم می‌شود که می‌توان « با یك تیردونشان را زد».

با وجود این، در حکم طرف دوم ، در مثال سادهٔ ما، عیبی وجود دارد. در واقع، برای تنظیم حکم طرف دوم، باید اضافه می‌کردیم: به شرطی که خطهای راست متوازی نباشند. در این حالت باید گفت: حتی با همان شکلی که حکم خود را تنظیم کرده بودیم، خطهای موازی استثنا می‌شوند، زیرا آنها در یك نقطهٔ بینهایت دور، به‌هم می‌رسند.

این نقطهٔایده‌آلی بینهایت‌دور،خیلی‌بیشترازنجات ازتنگنای«اگر» به‌کارمی‌آید ومی‌تواند در حل مسأله‌های جدی‌تری به ماکمك کند. اگر

خطهای راست در یك امتداد، یعنی متوازی باشند، یك‌نقطهٔ مشترك در بینهایت دورخواهند داشت؛ واگر خطهای راستی با امتداد مشترك دیگر در نظر بگیریم، نقطهٔ بینهایت دور مشترك دیگری پیدا خواهند کرد؛ و بنابراین، به همان اندازه که امتداد وجود دارد، نقطهٔ بینهایت دورهم، وجود خواهد داشت.

همیشه‌می‌توان‌بادقت‌معلوم‌کردکه به‌کدامیك‌ازاین‌نقطه‌هاسروکار داریم: تنها کافی است که جهت امتدادی را که به طرف این نقطه می رود، دردست داشته باشیم. اگر کمی مختصات خود راتغییر دهیم، حتی این امکان‌بدست می‌آیدکه معادلهٔ خطی را بنویسیم‌که همهٔاین نقطه‌های بینهایت دور، روی آن قرار گرفته باشند. معلوم می‌شود که این معادله به‌همان شکل معادلهٔ خطراست‌است. به‌همین مناسبت است که‌می‌گوییم: همهٔ نقطه‌های بینهایت دور، برخط راست بینهایت دور، قرار دارند.

تا اینجا، همهٔ آنچه را که گفتیم، یك سرگرمی توخالی به نظر می‌رسد. می‌توانیم معادلهٔ خط راستی رابنویسیم‌که وجودندارد. احتمالاً حتی بهتر است که هیچ تلاشی دربارهٔ تصور آن نکنیم. هرخط راست، دردوجهت‌به‌سمت‌بینهایت می‌رود؛ با وجوداین، ماتنهایك نقطهٔ‌بینهایت دوررابه‌آن منتسب می‌کنیم (که‌به یاری‌آن، درستی‌دوطرفه بودن‌رابطهٔ خودراحفظ کنیم: وجود دو نقطهٔ ایده‌آلی، این دوطرفه‌بودن‌رانقض‌می‌کرد). موضوع اینست‌که دو انتهای خط راست، در بینهایت به هم‌می‌رسند، مثل اینکه خط راست دربینهایت، شبیه به‌دایره شده باشد. به‌این ترتیب، خطهای راست متوازی راکه ازدوجهت، امتداد یافته‌اند، می‌توان مثل دایره‌هایی دانست که برنقطه‌های جداگانهٔ خط راست بینهایت‌دور،

آویزان شده‌اند، شبیه میوه‌هایی کـه برشاخه آویخته‌اند، ضمناً خطهای متوازی هم از یك نقطهٔ این خط راست بینهایت دور «روییده‌اند».



البته، هیچکس به ما این حق را نمی‌دهـد تاخط راست بینهایت دور را، به‌صورت یك خط راست معمولی رسم کنیم؛ و اصلاً چـه‌کسی می‌داند که آنرا چگونه باید رسم‌کرد؟ روی آن نقطه‌ای وجود دارد که در عین حال هم در شمال است و هم درجنوب، نقطهٔ دیگری روی ایـن خط پیدا می‌شود که شرق و غرب درآنجا به هم می‌رسند وغیره.

با وجود این، مادیگردر این باره فکر نمی‌کنیم: این، متعلق بـه دنیایی نیست که بتوان آنرا «لمس» کرد؛ «سروان هایکه» تنها یك‌سهو قلم است.

ولی، خط راست بینهایت دور، هرچه باشد، چگونه می‌توان‌باآن عمل کرد؟ ما معادلهٔآنرا می‌دانیم. بنابراین، این فکر پیش می‌آیدکه‌آیا نمی‌توان، مثلاً محل برخورد آنرا با سهمی پیدا کـرد؟ چرا! در ایـن مورد،تنها بایدجوابهای مشترك دومعادله‌را پیداکرد. وآنوقت،بلافاصله معلوم می‌شود، خط راست بینهایت دور، که بانگاهی تردیدآمیز و مبهم باآن بر خورد کردیم، چگونه می‌تواند به منحنیهای مخروطی، روشنی ببخشد .

درواقع،خیلی طبیعی است که به‌دنبال پاسخ چنین پرسشی‌باشیم: آیا، با دردست داشتن یك معادلهٔ درجه دوم دومجهولی، می‌توان معلوم کرد که این معادله مربوط به کدامیك از منحنیهای مخروطی است؟

پاسخ را ، خط راست بینهایت دور می‌دهد. اگر معادلهٔ این خط راست، جواب مشترکی بامعادلهٔ منحنی نداشته باشد، بایك بیضی سروکار داریم؛ اگر دو معادله ، تنها یك جواب مشترك داشته باشند، گفتگو از یك سهمی است؛ وبالاخره اگردوجواب مشترك وجود داشته باشد، منحنی مورد نظرما، یك هذلولی است. حالت دیگری هم پیش نمی‌آید (توجه کنیم که دایره، حالت خاصی از بیضی است).

نتیجه‌ای را که بدست آوردیم، با تصور ما ، کاملاً مطابقت دارد. بیضی، به طور کامل در « قسمت محدودی» از صفحه جا می‌گیرد وروشن است که نمی‌تواند باخط راست بینهایت دور، نقطهٔ مشترك داشته باشد. هردوبازوی سهمی با هم پیش‌می‌روند، خیلی شبیه به دوخط متوازی، وبنابراین کاملاً می‌شود فهمید که چرا این دوبازو ، تنها دریك نقطهٔ بینهایت دور، به‌هم می‌رسند.

شاخه‌های هذلولی، درکنار دوخط راست، که امتدادهای متفاوتی دارند، پیش می‌روند وبنابراین، طبیعی است که به‌طرف دونقطهٔ بینهایت دور بروند .

به این ترتیب، ما اشتباه نکردیم وکاملاً حق داشتیم که این نقطه‌ای را که «وجود ندارد»، ازحق رأی محروم نکردیم.

وحالا، جرأت این را پیدا می‌کنیم که به‌آخرین پرسش بدون‌پاسخ خود، یعنی معادلهٔ درجه دوم به صورت

$$x^۲ = -۹$$

نزدیك شویم وبه آن حمله کنیم.

عددهای مختلط

عددی را، که از مجذورآن به عدد ۹ـ برسیم ، با نماد $\sqrt{-۹}$ نشان می‌دهیم، البته اگر چنین عددی وجود داشته باشد. ولی، تاکنون، مابه عددی برنخورده‌ایم که از مجذورآن، یك عدد منفی بدست آید. چه۳ـ وچه ۳+ را که به توان دوم برسانیم، در هرحال ۹+ بدست می‌آید.

همینطور، ما دربارهٔ $\sqrt{-۱}$ هم چیزی‌نمی‌دانیم ومعلوم نیست برابر با چه چیزی است. اگر از کسی هم در این باره بپرسیم، احتمالاً پاسخ می‌دهد: «آی....چقدر می‌تواند باشد،من نمی‌دانم»،فرض‌کنیم که‌پاسخ دهنده، چنان این«آی» را ، که درآغاز جمله‌اش بود، کشدار بیان کند که شنوندهٔ خوش باوری،همین «آی» رابه جای خود پاسخ بگیرد،وچون گفتگو ازریاضیات است ودر ریاضیات هم،نشانه‌ها را باحرفهای‌لاتینی می‌نویسند، اینطور بنویسد:

$$\sqrt{-۱} = i$$

وآنـوقت، این شنونده می‌تواند با اطمینان به ما بگوید که: «من حالا می‌توانم بگویم که $\sqrt{-۹}$ چقدر است، این ریشه برابر است با ۳i ، ضمناً می‌تواند برابر با ۳iـ هم باشد» . ما هم هیچ اعتراضی نمی‌توانیم داشته باشیم. اگر $\sqrt{-۱}$ برابر با i باشد، i همان عددی است که از مجذور آن ۱ـ بدست می‌آید:

$$i^{۲} = -۱$$

وبنابراین خواهیم داشت:

$$(+۳i)^{۲} = ۳i \cdot ۳i = ۹i^{۲} = ۹(-۱) = -۹ ،$$

وهمچنین

$$(-۳i)^{۲} = (-۳i).(-۳i) = ۹i^{۲} = ۹(-۱) = -۹$$

عیب کار در اینست که عدد i ، درواقع وجود ندارد وتنها محصول یك

سوء تفاهم است. وبه این ترتیب، هنوز نمی‌دانیم‌که $\sqrt{-1}$ چقدر است.

ولی‌بیاییم‌واین«سوءتفاهم» راپذیریم‌وهمانطورکه برای‌جستجوی $\sqrt{-1}$ از آن استفاده کردیم، بیشتر در بارهٔ آن آزمایش کنیم. کسی‌چه‌می‌داند، شایدهمین عنصر «نبوده» و «بی‌وجود» بتواند ما را به نتیجه‌های مهمی برساند!

و معلوم شد که با کمك این عنصر، چه‌کارهای شگفت‌آوری که نمی‌توان‌انجام‌داد! نظریهٔ‌تابعها، یکی‌ازبرازنده‌ترین وباارزش‌ترین‌شاخه‌های ریاضیات‌است، که‌براساس‌آن، بنیان گرفته است . اگر ما نخواهیم با i سروکار داشته باشیم، باید بلافاصله وبه طور دقیق اعلام کنیم که مابا نظریهٔ تابعهای با متغیر حقیقی‌کار می‌کنیم. به طور کلی، هیچ شاخه‌ای ازریاضیات‌وجودندارد که‌درآن گفتگوبرسرموضوعی‌جدی‌باشدوازiاستفاده نکنیم. حتی هندسه هم، ازاین موضوع برکنار نیست. عنصر اسرارآمیز i ، قدرت اینرا داردکه بسیاری ازحکمهای متناقض را، زیرلوای‌مفهوم واحدی، به هم بپیوندد.

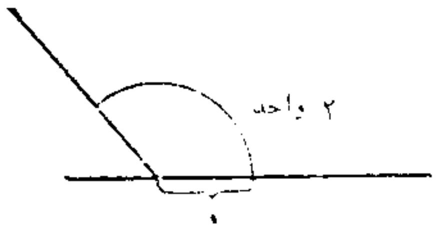
ما قرار گذاشته بودیم که از فرمول استفاده نکنیم، وبه همین مناسبت در اینجا هم شما، تنها از میوه‌ای که بدست آمده است، لذت بردید؛ به طور کلی، در واقع امرهم، عنصرهای ایده‌آلی، تنها به‌برکت شکل خود، جان می‌گیرند وزندگی می‌کنند.

حالا که دیگر برسر به کاربردن نماد i توافق‌کرده‌ایم، می‌توانیم رابطه‌هایی را که بین تابعهای متفاوت وجود دارد، نشان دهیم ، چیزی که حتی فکر آنرا هم نمی‌توانستیم در سربپرورانیم.

رابطهٔ بین تابعهای مثلثاتی و تابع نمائی

چه‌کسی ممکن بود گمان کند که بین تابعهای مثلثاتی و تابع نمائی، رابطه‌ای وجود دارد؟

وحالا، زمان آن رسیده است که این رابطه رانشان دهیم. اگر زاویه را به‌کمك طول کمان دایرهٔ متناظر آن، که شعاعی برابر واحد داشته‌باشد، اندازهٔبگیریم،کسینوس زاویه‌ای که‌به اندازهٔ دو واحدباشد (یعنی$\cos ۲$) با ایـن رابطـه بیان می‌شود:



$$\cos ۲ = \frac{e^{۲i} + e^{-۲i}}{۲}$$

که‌درآن، e عبارتست ازمبنای لگاریتم طبیعی. شبیه‌همین‌دستور را، برای هر زاویهٔ دلخواهی می‌توان نوشت:

$$\cos ۳ = \frac{e^{۳i} + e^{-۳i}}{۲}$$

$$\cos ۴ = \frac{e^{۴i} + e^{-۴i}}{۲}$$

چطور ممکن‌است‌که کسینوس یك زاویه، یعنی نسبت دوپاره‌خط،چیزی که به طور روشن یك عدد حقیقی است، بـا عـدد «بی‌وجود» طرف دوم تساوی، برابر باشد؟

ولی، موضوع‌اینست‌که درسمت‌راست‌این‌تساوی، یك عددحقیقی

معمولی قـرار دارد . ضمن انجام عملها ، ایـن i از جهانی اسرارآمیز ظاهـر می‌شود، نوری برماهیت وجودی ایـن رابطه می‌اندازد و دوبـاره ناپدید می‌شود.

در موقـع کشف عدد، ضمن بـازیهای معمائی هم، چنین وضعی وجود دارد.

«عددی فکر کنید ؛ آنرا در ۳ ضرب کنید؛ بـه حاصل، ۴ واحد اضافه‌کنید؛ حاصل را۲ برابر کنید؛ وسپس از نتیجه‌ای که پیدامی‌شود، ۶ برابر عددی را که فکرده‌اید، کم کنید».

منتظر می‌مانم که‌طرف من محاسبه را تمام‌کند وبعد، بدون‌اینکه هیچگونه پرسش اضافی مطرح کنم، به او می‌گویم کـه در نتیجهٔ‌کار، به عدد ۸ رسیده‌است. مسیر محاسبه رامی‌توان اینطور شرح داد. عددی را که در نظر گرفته شده: x ؛ ۳ برابر آن می‌شود ۳x، ۴ واحد به آن اضافه می‌شود: ۳x+۴؛ این‌حاصل ۲ برابرمی‌شود: ۲(۳x+۴) .بالاخره باید از این نتیجه، شش برابر عدد اصلی ، یعنی ۶x را کم کرد:

$$۲(۳x+۴)-۶x$$

۲ را درهرکدام از جمله‌های داخل پرانتز ضرب می‌کنیم، بدست‌می‌آید:

$$۶x+۸-۶x$$

که آنرا می‌توان به این ترتیب هم نوشت:

$$۸+۶x-۶x$$

وروشن است که اگر به عدد ۸ یکبار ۶x را اضافه کنیم وبعد، دوباره ۶x را از آن پس بگیریم، همان عدد ۸ باقی می‌ماند. عددی را که فکر

کرده‌ایم، می‌آید و در محاسبه‌ها دخالت می‌کند وسرآخر ناپدید می‌شود.

از رابطهٔ بین تابعهای مثلثاتی و تابع نمائی، می‌توان رابطه‌هایی بدست‌آورد که در آنها، ردپائی از i باقی نمانده باشد. مثلا، ازتساوی

$$\cos ۲ = \frac{e^{۲i} + e^{-۲i}}{۲}$$

مجذور $\cos ۲$ را پیدا می‌کنیم.

برای اینکه با کسر سروکار نداشته باشیم، ابتدا دو طرف ایـن تساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲\cos ۲ = e^{۲i} + e^{-۲i}$$

حالا، دو طرف‌تساوی‌را به‌توان‌دومی رسانیم. مجذور سمت چپ تساوی چنین می‌شود:

$$(۲\cos ۲)^{۲} = ۲ \times ۲ \times (\cos ۲)^{۲}$$

(می دانم که فکر می‌کنید چرا به جای ۲ × ۲، مساویش ۴ را نگذاشته‌ام ولی، کمی شکیبائی داشته باشید).

درسمت راست تساوی، با مجموع دوجمله سروکار داریم. برای اینکه این دوجمله‌ای را مجذور کنیم، بایـد ابتدا مجذور جملهٔ اول را بدست آوریم؛ ضمناً می‌دانیم، بـرای اینکه توانی را به تـوان تازه‌ای برسانیم، باید نماها را در هم ضرب کنیم:

$$(e^{۲i})^{۲} = e^{۴i}$$

بعدباید دوبرابرحاصلضرب دو جمله را پیداکنیم؛ ضمناً به‌یادمی‌آوریم

که در ضرب دوتوان، وقتی پایه‌های مشترك دارند، باید نماها را باهم جمع کرد، وهم اینکه وقتی نمائی برابر صفر باشد، حاصل توان برابر واحدمی‌شود:

$$۲\times e^{۲i}\times e^{-۲i}=۲e^{۲i+(-۲i)}=۲e^{۰}=۲$$

بالاخره، باید مجذور جملهٔ دوم را بدست آوریم: $(e^{-۲i})^{۲}=e^{-۴i}$

به این ترتیب، مجذور سمت راست تساوی، چنین می‌شود:

$$e^{۴i}+e^{-۴i}+۲$$

ودر نتیجه:

$$۲\times ۲(\cos ۲)^{۲}=e^{۴i}+e^{-۴i}+۲$$

حالا، دوطرف تساوی را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$۲(\cos ۲)^{۲}=\frac{e^{۴i}+e^{-۴i}}{۲}+۱$$

واین‌عبارت $\frac{e^{۴i}+e^{-۴i}}{۲}$ برای‌ماآشناست‌ودرواقع‌برابراست‌با $\cos ۴$ بنابراین

$$۲(\cos ۲)^{۲}=\cos ۴+۱$$

که البته، برای اینکه برای کسی سوء تفاهم نشود و $\cos ۴+۱$ را $\cos ۵$ نپندارد، بهتر است آنرا به اینصورت بنویسیم:

$$۲(\cos ۲)^{۲}=۱+\cos ۴$$

بالاخره، اگر دو طرف این تساوی را بر ۲ تقسیم کنیم، بدست می‌آید

$$(\cos ۲)^{۲} = \frac{۱ + \cos ۴}{۲}$$

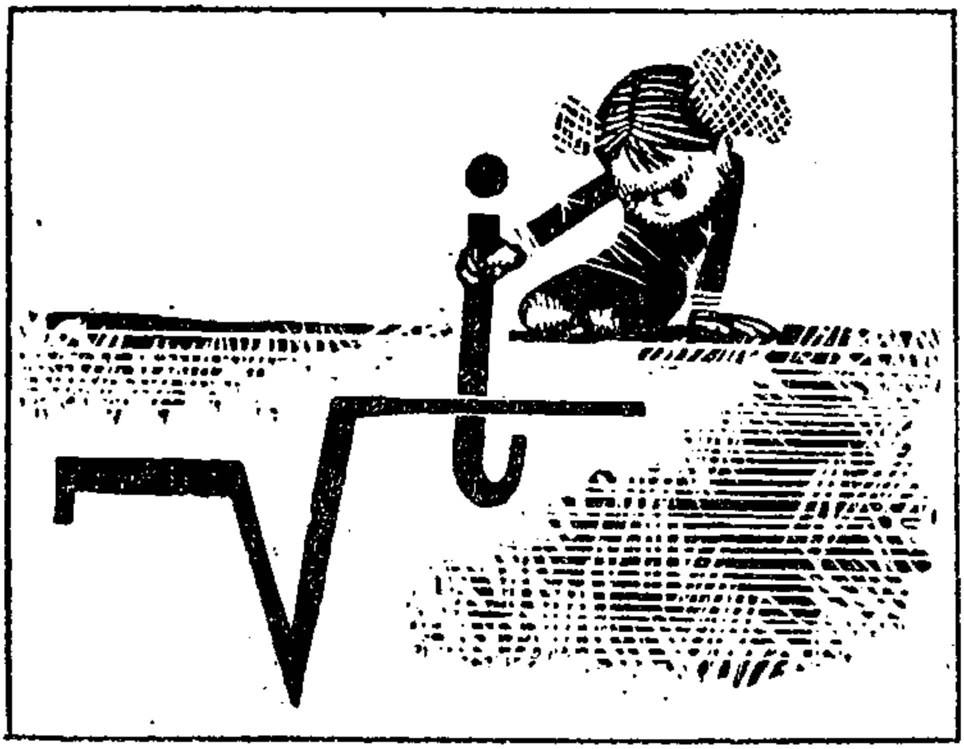
واین یکی از رابطه‌های مثلثاتی است که به خوبی بـا آن آشنا هستیم؛ همانطور که می‌بینید، در این رابطه، هیچ ردپایی از i وجود ندارد.

ممکن است، بابدست‌آوردن این نتیجه آرامشی پیداکنیم، جلوتر نرویم ودچار این اشتباه شویم که چیز تازه‌ای بدست نیاورده‌ایم. ولی، اگر به جای توان دوم، مجموع دوجمله را ، بـا استفاده از قانون بسط دوجمله‌ای‌نیوتون، به‌توانهای‌دلخواهی برسانیم، «دریك‌لحظه»، دستورهای مثلثاتی تازه‌ای پیدامی‌کنیم.

من از خواننده، به خاطر این محاسبه‌های طولانی، عذرمی‌خواهم که‌ظاهراً، نتیجهٔ آن، تنها یادآوری یك قانون آشناست. ولی، من گمان می‌کنم که خواننده باید دست‌کم در یك مورد ببیند کـه چگونه ممکن است، عنصر i ، که به محاسبه‌ها جان تازه‌ای‌می‌دهد،خودناپدیدمی‌شود.

ولی، اهمیت اصلی i ، در اینجانیست.

کاملاً روشن است که وجود i ، این مکان را به مامی‌دهـد کـه آخرین معادلهٔ درجه دومی را که غیر قابل حل بـه نظر می‌رسید ، حـل کنیم. واصولاً به همین منظور بود که i را پذیرفتیم، وحالا به برکت وجود آن، می‌توانیم ازعددهای منفی هم، جذر بگیریم. درست است‌که ما به مقداری «خیالی» متوسل شدیم، ولی اطمینان داشته باشید که مـا وقت خود را بیجهت تلف نمی‌کنیم ومی‌توانیم ثابت‌کنیم که هیچکس نباید به چنین مقادیری بی اعتنا باشد. مثلاً، برای معادلهٔ



$$(x-۲)^۲=-۹$$

می توانیم جواب را پیدا کنیم:

$$x-۲=\sqrt{-۹}$$

ضمناً: $\sqrt{-۹}=۳i$ یا $\sqrt{-۹}=-۳i$. اگر ۲ــ رابه سمت راست‌تساوی ببریم، دو «ریشهٔ» معادله بدست می‌آید (جوابهای معادله‌را«ریشه»های آن هم می‌نامند، واین نامگـذاری بـه این مناسبت است کـه در بیشتر جوابها علامت ریشگی وجوددارد):

$$x=۲+۳i، \quad x=۲-۳i$$

عددهایی بدست می‌آیدکه ازمجموع دوقسمت تشکیل شده است: حقیقی و «خیالی». قسمت «خیالی» این عدد را، موهومی می‌نامند. چنین ترکیبی

از دنیای حقیقی با دنیای موهومی را، عددمختلط گویند. اگرچه دوعدد مختلطی که دربالا نوشتیم،«چیزهایی نبوده» به‌نظر می‌رسند، ولی‌مجموع آنها، عددی حقیقی است، زیرا ضمن جمع، $+3i$ و $-3i$ با هم حذف می‌شوند. علاوه بر آن، می‌توان به سادگی تحقیق کرد که حاصلضرب این دوعدد مختلط هم، عددی حقیقی است.

بین عددهای مختلط، عددهای حقیقی و همچنین عددهای موهومی خالص هم وجود دارد. مثلاً $5+0i=5$، یك عدد حقیقی و $2i=2i+0$، یك عدد موهومی خالص است.

اگربخواهیم ازیك‌عدد منفی، ریشهٔ چهارم‌یاششم یا هشتم‌بگیریم، باز هم به همان اشکال مربوط به ریشهٔ دوم، برخورد می‌کنیم.

همیشه، وقتی که یك عدد را به توان عددی زوج برسانیم، خواه پایهٔ آن مثبت باشد یا منفی، به عنوان‌نتیجه، یك عدد مثبت بدست می‌آید. مثلاً، برای ریشهٔ چهارم عدد ۱۶-، نه بین عددهای مثبت ونه بین عددهای منفی، نمی‌توانیم جوابی پیدا کنیم، زیرا

$$(+2)^4=2\times2\times2\times2=16,$$

$$(-2)^4=\underline{(-2).(-2)}\ .\underline{(-2).(-2)}=(+4).(+4)=16,$$

ممکن است تصور شود که برای این ریشگیهای مختلف، باید عنصرهای ایده‌آلی تازه‌ای را وارد در ریاضیات کنیم. ولی، بهیچوجه، چنین کاری لازم‌نیست. واین، یکی از زیباترین وشگفتی‌آورترین پدیده‌های ریاضیات است که تنها با استفاده از همین عنصر i، می‌توانیم امکان‌بدست‌آوردن هر ریشه‌ای‌را، با هرفرجه‌ای که داشته‌باشد، در اختیارداشته‌باشیم.

علاوه برآن، می‌توان ثابت کرد که در حوزهٔ عددهای مختلط،هر معادلهٔ جبری، بدون‌توجه به‌اینکه چه درجه‌ای دارد، دارای جواب‌است. این نتیجه را، قضیهٔ اساسی جبر گویند. واین، هیچگونه تناقضی با قضیهٔ آبل نداردکه بنابرآن، عدم وجود راه حل کلی برای معادلهٔ درجهٔپنجم، ثابت می‌شود. اثبات قضیهٔ اصلی جبر ، تنها یک « اثبات وجود» است وهیچگونه دستورالعملی بـرای آوردن جوابهای معادله (به‌کمك چهار عمل حساب‌وریشه گرفتن) به همراه ندارد.

ضمن جذرگرفتن، همیشه دومقدار بدست می‌آید: یکی با علامت «+» ودیگری با علامت «−». به همین مناسبت، معادلهٔ درجه دوم، در حوزهٔ عددهای مختلط، همیشه دو جواب دارد. ولی‌آیا واقعاً همیشه؟ معادلهٔ

$$(x-۳)^{۲}=۰$$

تنها یك جواب دارد، زیرا عددی که از مجذور آن ۰ بدست آید، تنها خود ۰ است وبنابراین

$$x-۳=۰$$

یعنی

$$x=۳$$

واین تنها جواب معادلهٔ ماست. ولی، این معادله رابه این ترتیب هم‌می‌توان نوشت:

$$x^{۲}-۶x+۹=۰$$

به‌جای این عبارت، می‌توان عبارت دیگری در نظر گرفت که با تقریب

خوبی به آن نزدیك باشد، به این ترتیب که به جای ضریبهای ۱،۶ـ و ۹، عددهایی راقرار دهیم که کاملاً مساوی اینها نباشند، ولی خیلی به و ۱ ۶ـ و ۹ نزدیك باشند (مثلاً $۰/۹۹۹x^۲ - ۵/۹۹۹x + ۹/۰۰۱ = ۰$). هر قدر که این معادله به‌معادلهٔ مانزدیکترباشد، دو ریشهٔ آن به هم نزدیکتر می‌شود. بنابراین، می‌توان گفت، در لحظه‌ای که این معادله، دقیقاً بر معادلهٔ

$$x^۲ - ۶x + ۹ = ۰$$

منطبق شود، ریشه‌های آن با هم برابر می‌شود.

معادلهٔ درجهٔ چهارم، چند جواب دارد؟ معادلهٔ

$$x^۴ = ۱$$

را می‌توان، بدون کمك i حل کرد. اگر ۱+ یا ۱ − را به توان چهار برسانیم، در هر دوحالت به عدد ۱+ می‌رسیم. به این ترتیب، ممکن است بگوییم که برای این معادله، تنها دو ریشهٔ ۱+ و ۱ − وجوددارد. ولی، در چنین صورتی، صدای i بلند می‌شود: «صبر کنید! مطلب را درست نگفته‌اید! یك معادلهٔ درجهٔ چهارم، بایدچهار جواب داشته‌باشد. شما نمی‌توانید، بدون وجود من، از اینجا عبور کنید!»

و درواقع هم، i یکی از ریشه‌های معادله است وبه جزآن i − را هم باید به حساب آورد. زیرا

$$i^۴ = \underline{i \cdot i} \cdot \underline{i \cdot i} = i^۲ i^۲ = (-۱) \cdot (-۱) = +۱$$

$$(-i)^۴ = \underline{(-i) \cdot (-i)} \cdot \underline{(-i) \cdot (-i)} = i^۲ \cdot i^۲ = (-۱) \cdot (-۱) = +۱$$

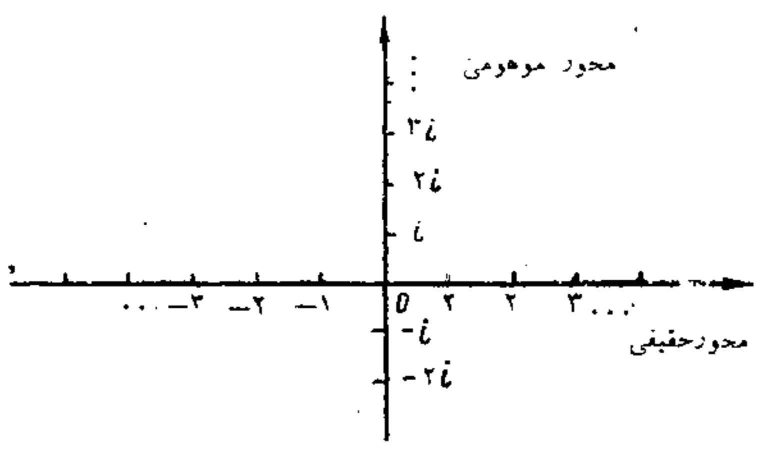
به این ترتیب، i درخانوادهٔ ریشه‌های هرمعادله‌ای داخل می‌شود. می‌توان

ثابت کرد که در حوزهٔ عددهای مختلط، هرمعادله‌ای، به تعداد درجه‌ای که دارد، دارای‌ریشه است. ضمناً باید همیشه به یادداشت کـه بعضی از ریشه‌های‌معادله، می‌توانند باهم برابر باشند.

بـه این ترتیب است که i ، وارد درجبر مـی‌شود وبه آن خدمت می‌کند.

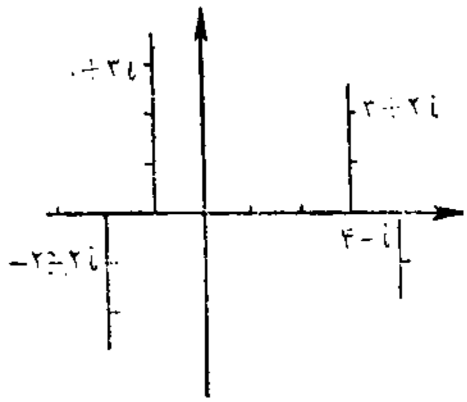
ولی، خیلی بیش از معادله‌ها، i به‌نظریهٔ تابعها، خدمت می‌کند. برای اینکه به این داستان بپردازیم، اول باید بگوییم که‌عددهای مختلط را، چگونه تصور می‌کنند.

i را به عنوان واحدی از نوع جدید در نظر می‌گیریم. برای این منظور، i را روی خط راست عددی تازه‌ای نشان می‌دهیم. نقطهٔ صفراین محور عددی را می‌توان بـرنقطهٔ صفر خط راست عـددی حقیقی، منطبق دانست، زیرا $i \times 0$، برابر است با ۰. به این ترتیب، این دو خط راست عددی را می‌توان درست مثل دستگاه محورهای مختصات ، فرض کرد:



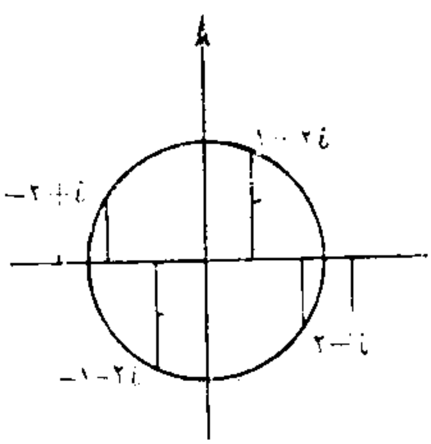
به‌کمك این دستگاه، می‌توان هرعدد مختلط را، که به صورت مجموعی از یك عدد حقیقی ویك عدد موهومی است، به صورت‌نقطه‌ای ازصفحه،

نشان داد. طول این نقطه، باقسمت حقیقی وعرض آن، با قسمت موهومی عدد برابر است. در اینجا، نمایش چند عدد مختلط را می‌بینید:



به این ترتیب، عددهای مختلط، نه برخط راست عددی، بلکه برصفحهٔ عددی قرار می‌گیرند.

قدر مطلق یك عدد مختلط، بـه معنای فـاصلهٔ آن از نقطهٔ صفر است. این فاصله، می‌تواند بزرگتر ویـا کوچکتر باشد، ولی، عـددهای مختلط زیادی هستند که دارای یك قدر مطلق‌اند، یعنی بـه یك فاصله، از نقطهٔ صفر قرارگرفته‌اند. چنین عددهایی روی محیط دایره‌ای، به‌مرکز ۰، قرار دارند:



هیچ مبنایی وجود ندارد که بنابرآن، یکی از این عددها را، کوچکتراز

دیگران به‌حساب آوریم، بنابراین ، درحوزهٔ عددهای مختلط، نمی‌شود دربارهٔ «بزرگتر» یا «کوچکتر» بودن عددها، گفتگو کرد.

باوجود این، به‌سادگی معلوم می‌شود که‌درمورد عددهای مختلط هم، همهٔ قانونهای قبلی برای انجام عملها را، می‌توان بـه‌کار برد،بـه ایـن‌ترتیب‌که دراین عملها، i را مقداری مجهول به‌حساب می‌آوریم، تنها هر جا که به i^2 برخورد کردیم، به‌جای آن ۱ـ قرار می‌دهیم .

بسط تابع به رشتهٔ توانی

حالا، دوبـارهٔ به یـکی از نتیجه‌های قبلی برمی‌گردیم . درمثال مربوط به شکلاتها، بدست آوردیم:

$$۱\frac{۱}{۹}=۱+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰۰}+\dots$$

در سمت راست، هرجمله برابر است بایکدهم جملهٔ قبلی: $\frac{۱}{۱۰}$ عـبارتست از نسبت هر جمله به جملهٔ قبل از آن، یعنی $\frac{۱}{۱۰}$، برابر با قدر نسبت‌این تصاعد هندسی است. سعی می‌کنیم،$۱\frac{۱}{۹}$ را طوری بنویسیم که نقش عدد $\frac{۱}{۱۰}$ در آن به روشنی معلوم باشد:

$$۱=\frac{۹}{۹}, \qquad ۱\frac{۱}{۹}=\frac{۱۰}{۹}$$

ما می‌دانیم که صورت ومخرج یك‌کسر را می‌توان بریك عددتقسیم کرد. صورت ومخرج کسر اخیررا بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم:

$$۱\frac{۱}{۹}=\frac{۱۰}{۹}=\frac{۱}{\frac{۹}{۱۰}}$$

به این ترتیب، به کسر $\frac{۹}{۱۰}$ می‌رسیم که به روشنی به‌کمك $\frac{۱}{۱۰}$ بیـان شده است. در واقع، اگر $\frac{۱}{۱۰}$ را از واحد کم کنیم، بلافاصله $\frac{۹}{۱۰}$ بدست می‌آید.

$$\frac{۹}{۱۰}=۱-\frac{۱}{۱۰}$$

وبنابراین داریم:

$$۱\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۱۰}}$$

اگر به جای $۱\frac{۱}{۹}$، مقدار آنرا که درسمت راست تساوی نوشته‌ایم، قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۱۰}}=۱+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰۰}+\dots$$

نتیجه‌ای راکه‌دراینجا بدست آوردیم، می‌توان عمومیت‌داد. اگرقدرنسبت تصاعد هندسی، به جای $\frac{۱}{۱۰}$، مثلاً برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، هرجملهٔ تصاعد، برابر با دو سوم جملهٔ قبل از آن می‌شود. در این حالت هم می‌توان ثابت کرد:

$$\frac{۱}{۱-\frac{۲}{۳}}=۱+\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۹}+\frac{۸}{۲۷}+\dots$$

ولی نباید فراموش کردکه مجموع جمله‌های هرتصاعدهندسی رانمی‌توان بدست‌آورد. برای‌قدرنسبتهای مساوی ۱+ یا ۱−، وهمچنین قدرنسبتهایی که قـدر مطلق آنها از واحد بیشتر باشد، تصاعـد هندسی مـا، متقارب نمی‌شود.

با وجود این، می‌توان ثابت کرد که اگر قدرنسبت برای باعددی بین ۰ و ۱ باشد ـ حتی اگر این قدر نسبت ، خیلی به واحد نزدیك‌شده باشد ـ همیشه باتصاعدی متقارب سروکارخواهیم داشت. ثابت می‌شود که مجموع چنین تصاعد متقاربی را می‌توان دقیقاً به همان صورتی نوشت که برای قدر نسبتهای $\frac{1}{10}$ و $\frac{2}{3}$ بدست‌آوردیم. بنابراین، همهٔ قدرنسبتهایی که در موردآنها، می‌توان مجموع جمله‌های تصاعدهندسی‌را بدست‌آورد، روی‌خط راست عددی، بین ۱ — و ۱ + قرار گرفته‌اند:



حالا، عددی را روی‌این پاره خط در نظر می‌گیریم. بدون اینکه مقداراین عدد را دقیقاً مشخص‌کنیم، آنرا به x نشان می‌دهیم. حتی‌حالا که‌از مقدار این عدد،اطلاعی نداریم، می‌توان در بارهٔ دنبالهٔ هندسی که‌به کمك آن بدست می‌آید، گفتگو کرد:

$$1;\quad 1 \times x = x;\quad x.x = x^2;\quad x^2.x = x^3;\quad x^3.x = x^4, \ldots$$

وبرای این دنباله، رابطهٔ زیررا نوشت:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

این تساوی، برای هرمقدار x درست‌است و تنها شرطی که در اینجالازم است،اینست که x مقداری بین ۱ — و ۱ + باشد.

روشن است که مقدار $\frac{1}{1-x}$ ، بستگی به این دارد که عدد x را چقدر در نظر بگیریم و بنابراین، مقدار این کسر، تابعی از x می‌شود. در

اینجا می‌گوییم که این تابع رابه صورت یك رشتهٔ توانی بسط داده‌ایم، یعنی به‌صورت رشتهٔ نامحدودی که‌از مجموع توانهای‌صعودیx ،درست شده است. مجموعهای جزئی این رشته، مقادیر تقریبی $\frac{۱}{۱-x}$را به‌مامی‌دهند،وهر چه تعداد جمله‌ها را بیشتر بگیریم، این تقریب، بهترمی‌شود. درتقریب نخست، به جای مقدار $\frac{۱}{۱-x}$، می‌توان عدد ۱ را انتخاب‌کرد؛ تقریبی بهتر ازآن، برابر$x+۱$، و با هم بهتر از آن برابر $۱+x+x^۲$ می‌شود وغیره.

پرسشی کلیتر پیش می‌آید: آیانمی‌شود هر تابع دلخواه را به صورت یك رشتهٔ توانی، بسط داد (روشن است که درحالت کلی، نباید انتظار داشته باشیم‌که این رشتهٔ توانی‌کاملاً ودقیقاً شبیه همان‌رشته‌ای باشد که ما هم اکنون از آن گفتگو می‌کردیم، بلکه باید انتظاررشته‌ای را داشته باشیم که از توانهای x ، همراه با ضریبهای عددی ؛ درست شده باشد). این یکی از جدی‌ترین مسأله‌های نظریهٔ تابعهاست. تابع$\frac{۱}{۱-x}$. خیلی ساده بود.ولی مامی‌توانیم‌تابع پیچیده‌تری، مثل یك‌تابع‌مجهول‌القوه را هم، به صورت رشته‌ای از توانهای x ، بسط دهیم، وساده‌تر از همه، موقعی است که پایه را برابر بـا ... ۲/۷۱ = e بگیریم. دراین حالت، برای هر مقدار دلخواه x بدست می‌آید:

$$e^x = ۱ + x + \frac{۱}{۲!}x^۲ + \frac{۱}{۳!}x^۳ + \frac{۱}{۴!}x^۴ + \dots$$

فایدهٔ این دستور، وقتی روشن می‌شود که بخواهیم برای عدد معینی از x ، مقدار e^x را محاسبه کنیم. به‌این ترتیب ، حاصل توانهای

عدد e (که شکل دهدهی آن، بی‌پایان است)، دردسترس ما قرار می‌گیرد. البته، این محاسبه خیلی مطبوع نیست، ولی، اگر x ، مقدار کوچکی باشد، می‌توان به جای این تابع نمائی، ۱+x را انتخاب کرد، یعنی مقدار x را به ۱، اضافه کرد؛ می‌بینید که چگونه کار را دربعضی حالتها ساده می‌کند.

اگر هم بخواهیم، مقدار دقیقتری برای حاصل تابع نمائی بدست آوریم، کافی است تعداد جمله‌های مجموع جزئی را بیشتر بگیریم ، یعنی یکی دوتوان متوالی x را محاسبه کنیم . مثلاً ، اگر بخواهیم ازعددگنگ[۳](... ۲/۷۱) ، ریشهٔ دهم بگیریم ، به این معناست که باید $(...۲/۷۱)^{\frac{۳}{۱۰}}$ را محاسبه کنیم، که منجربه محاسبهٔ توانهای دوم، سوم و چهارم کسر $\frac{۳}{۱۰}$ می‌شود که به نوبهٔ خود، به‌سرعت وسادگی بدست می‌آید. وچقدر خوب است که این بسط، برای همه مقادیر x ،درست‌است.

تابعهای لگاریتمی وتابعهای مثلثاتی راهم می‌توان، به صورت رشته‌های توانی بسط داد؛ در زمان‌ما، جدولهای لگاریتمی ومثلثاتی را ، براساس‌همین بسطها محاسبه می‌کنند.

ولی، این رشته‌ها، همیشه برای هرمقداری از x متقارب نیستند و ما باید همیشه‌توجه داشته باشیم که دچار اشتباه‌نشویم و مثلاً درمواردی که اصولاً ازتقریب نمی‌توان سخن گفت ، به این فکر نیفتیم که مقدار را با «مقادیر تقریبی» آن عوض کنیم. از اینجا، این پرسش پیش‌می‌آید که اگرتابعی دربرابر ماباشد، چگونه می‌توان مقادیری از x را پیدکرد، که به ازای آنها، تابع مفروض بتواند به یك رشتهٔ توانی تبدیل شود؟

دوباره به همأن‌تصاعد هندسی خودمان برمی‌گردیم. روشن کردیم که‌بسط

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots$$

تنها روی پاره خط از ۱ — تا ۱ +، درست است:



آیا روی خود تابع $\frac{1}{1-x}$ هم، عدد ۱ (ودر طرف دیگرصفر، عدد ۱-) باید به عنوان مرزی شناخته شود؟

بدون تردید! اگر x برابر با مقدار ۱ شود، چه پیش می‌آید؟

$$\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}$$

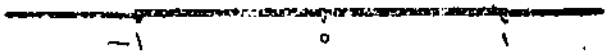
که خود همین‌نوشته، ما را متوقف می‌کند. آخر، تقسیم برصفررا برای ما قدغن کرده‌اند! به‌این ترتیب، اگر ما، رشتهٔ تصاعدی را هم در برابر خود نداشتیم، خود تابع فریاد می‌زد که: «در نقطهٔ ۱، توقف کنید!»

آیا، همیشه یک‌تابع به همین ترتیب به ما نشان می‌دهدکه تاکجا حق داریم برویم؟ در حوزهٔ عددهای حقیقی، اینطور نیست وبرای اینکه این مرزها را بشناسیم، باید برای هر تابع، زحمت بررسی جداگانه و مخصوص به‌آنرا، متحمل شویم. درحوزهٔ عددهای حقیقی‌هم، درلحظه‌ای که‌دچار اشکال شده‌ایم، صدای i بلند می‌شود که من می‌توانم مشکل‌شما را حل کنم.

مثالی‌بیاوریم. خوانندهٔ‌ما، که‌تاحدی‌باتصاعدهندسی‌آشناست، بلافاصله متوجه می‌شود که‌تابع $\frac{1}{1+x^2}$ را می‌توان به‌این ترتیب، به رشتهٔ‌توانی بسط داد:

$$\frac{۱}{۱+x^{۲}}=۱-x^{۲}+x^{۴}-x^{۶}+\dots$$

این رشته‌هم وقتی ، وتنها وقتی متقارب است که x بین ۱ـ و ۱+ قرار داشته باشد:



آیا در اینجا هم می‌توان با مراجعه به خود تابع، ایـن مرزها را مشاهده کرد؟ به‌جای x، عدد ۱+ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۱+۱^{۲}}=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

در این مورد که همه چیز روبه راه است. شایـد، باید اشتباه را در مرز دیگر جستجو کرد؛ به جای x ،عدد ۱ـ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۱+(-۱)^{۲}}=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

می‌بینیم که در اینجا هم، هیچ چیز بدی پیش نیامد.

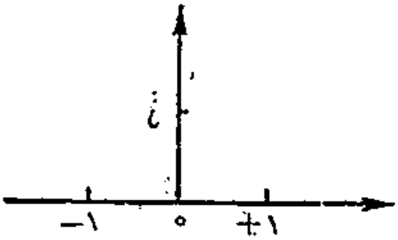
به نظر می‌رسد که به وضع نامطلوبی دچار شده‌ایم.

همینجاست که صدای i را می‌شنویم: «برای چی، مرا به جای x نمی‌گذارید؟» i راقرار می‌دهیم:

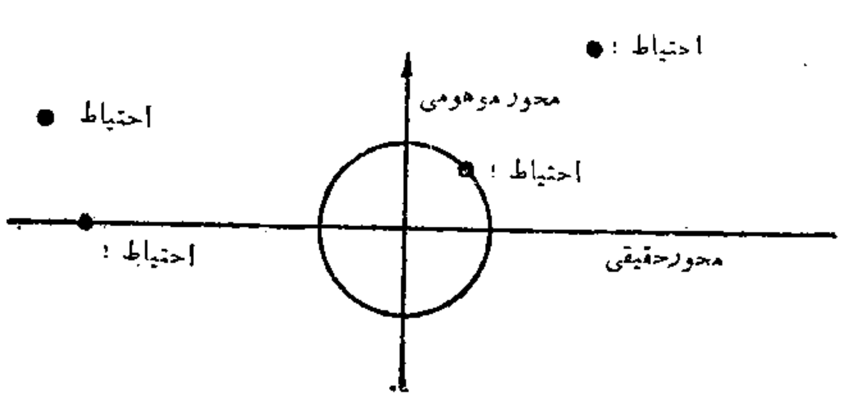
$$\frac{۱}{۱+i^{۲}}=\frac{۱}{۱+(-۱)}=\frac{۱}{۰}$$

ایست! دوباره به تقسیم برصفر رسیدیم! اگر عددهای مختلط را برروی صفحه، به یاد بیاوریم، بلا فاصله متوجه می‌شویم که فاصلهٔ i هم ، از نقطهٔ صفر، برابر با واحد است. اینکه،به خصوص‌دراین نقطه،تابع‌دچار

اشکال می‌شود، به‌این معناست که ماحق نداریم از مرز «واحدها» بگذریم:



به این ترتیب، معلوم می‌شود که مقادیر تابع را، علاوه‌بر نقطه‌های حقیقی، در نقطه‌های موهومی هم باید بررسی کرد. و این یك قانون کلی است: اگر نقطه‌ای وجود داشته باشد، که تابع در آنجا به مانعی برخورد کند، نمی‌توان این تابع را در نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها بیشتر از فاصلهٔ این نقطه تا ۰ است، به رشتهٔ توانی بسط داد. بنابراین، بین نقطه‌هایی از صفحهٔ عددی مختلط، که برای تابع نامطلوبند، باید نقطه‌ای را پیدا کرد که از همه به نقطهٔ صفر نزدیکتر باشد، منطقهٔ بی‌خطری که در آنجامی‌توان تابع را به‌رشتهٔ توانی بسط داد، در محدودهٔ فاصلهٔ این نقطه از ۰ قرار دارد:



دایره‌ای، به‌مرکز نقطهٔ صفر، بدست می‌آید. رشته، در داخل این دایره، واحتمالاً دربعضی از نقطه‌های محیط دایره متقارب است، ولی، حتی در یکی از نقطه‌های بیرون ازدایره، متقارب نیست. ولی، این دایره، همیشه

روی محور حقیقی، فاصله‌ای را جدامی کند که نقطهٔ ٥ درمیان‌آنست. ، می‌بینیم که درباره i ظاهرشد تانظم وآشتی رابرقرارکند. اگربخواهیم، می‌توان‌ترتیبی داد که i ناپدید شود. مامی‌توانیم به‌همان فاصلهٔ حقیقی که‌با استفاده ازیاری‌دوستانهٔ i پیداکردیم، اکتفاکنیم. ولی، ریاضیدان بادوق‌از i صرفنظرنمی کند. وقتی که i می‌تواند،چنین کمکهای با ارزشی به‌ما بکند ، هیچ دلیلی‌ندارد که به آن، به نظر چیزی‌که «وجود ندارد»، نگاه کنیم. همین «وجود» i است که ما را به دنیای شگفت‌آور نظریهٔ‌تابعهای بامتغیرمختلط می‌برد، دنیای تازه‌ای،که درآنجاهمه‌چیز، مثل دنیای حقیقی ،منظم وبه قاعده است.

۱۶. رازهای هنر

وقتی که با یك اثر تازهٔ هنری روبه رو می‌شوید ، به سختی می‌توانید خود را از زیر نخستین تأثیرهای آن نجات دهیدو معمولاً، ذهن شما متوجه موضوعهای دیگری می‌شود. شما می‌خواهید بدانید که این اثر چگونه به وجود آمده است، شما می‌خواهید از سرنوشت پنهانی و انسانی آن، آگاه‌شوید، درغم و شادی هنرمند ودر کار دقیق روزانهٔ او شریك باشید، و باروش کار اوآشنا شوید.وآنوقت، بعد ازهمهٔ اینهاست که‌به‌اثر هنری نگاه می‌کنید.

ازدنیای اختراعی خود به زمین بر می‌گردیم ونگاهی به رازهای ریاضیات می‌اندازیم. هرقدر هم که من تلاش کنم، بازهم نمی‌توانم‌از خواننده پنهان‌کنم‌که بررسیهای دقیق وآزار دهنده‌ای انجام گرفته‌است تاریاضیات به اینجا رسیده است.

من، وقتی که می‌خواستم این‌کتاب را پدیدآورم، بیش از هرچیز

دیگری، به این موضوع علاقمند بودم که از «فلسفهٔ وجودی» مشتق سر درآورم؛ به خصوص از اینجهت که مشتق، بـه‌رازهای هنرمندانه‌ای که مربوط به روشهای ریاضی است، بستگی دارد. درست است که مشتق‌را نمی‌توان، نسبت به آنچه که تاکنون آفریده شده است، دربالاترین‌مرتبه گذاشت، ولی اهمیت و ارزش آن بی‌اندازه زیاد است. هیچ کار بزرگی نیست که به‌ریزه کاریهایی نیازنداشته باشد.

ما از همان آغاز کار گفتیم کـه مفهوم تابع،هستهٔ اصلی تمامی ریاضیات است واینرا هم‌گفتیم که «تصویر» تابع را می‌توان به وسیلهٔ منحنی متناظر باآن داد. ولی، این« تصویر»، خیلی دقیق نیست.

مادر آغاز، منحنی را از پـاره خطهای راست می‌ساختیم؛ سپس نقطه‌های بینابینی را، وهـرچه ممکن بود، نزدیکتر بـه هم، انتخاب‌می کردیم، ومنحنی را به‌صورت‌صاف وهمواردرمی‌آوردیم. ولی، وقتی‌که با این روش وبه‌کمك قلم، منحنی را هموارمی‌کنیم، مشکلاتی به‌وجود می‌آید: درشکلی‌که رسم‌می‌کنیم به سختی‌می‌توان، حتی‌بین یك شانزده ضلعی بادایره تفاوت گذاشت.

به سختی می‌توان امیدوار بودکه ازچنین شکل غیردقیقی بتوان نتیجه‌هایی دربارهٔ«رفتار»تابع‌موردنظرمان‌بدست‌آورد!روشهای‌دقیقی‌لازم است تا بـه‌کمك آنها بتوان، حتی انحرافهای خیلی کـوچك را کشف کرد و «رفتار» تابع را ، با هردقت دلخواهی، دنبال‌کـرد. و این وسیلهٔ دقیق، همان مشتق است.

امتداد مماس

از شکل آغاز می‌کنیم.

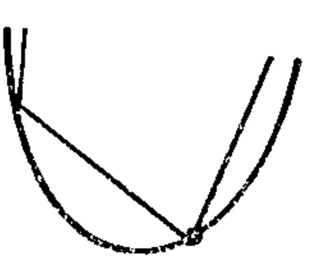
وقتی که من کوشش می‌کردم؛ یك سهمی را رسم کنم، گفتم که بازوهای آن دارای شیب زیادی هستند. ولی، وقتی که از امتداد یك منحنی هموار سخن می‌گوییم، منظورمان چیست ؟

ما،خیلی خوب امتداد خط راست را می‌شناسیم؛ شیب‌خط راست رامی‌توان درهرنقطه‌ای اندازه‌گرفت. درمورد خط راست، مطمئن‌شده‌ایم که هرگزمنحرف نمی‌شود وهمیشه در امتدادنخستین خود، باقی‌می‌ماند. ولی، خط منحنی را، به‌اینجهت منحنی می‌گویند که دائماً امتداد خودرا عوض می‌کند. یکی ازنقطه‌های منحنی را می‌گیریم و ازاو می‌پرسیم: «امتدادتوچیست؟»:

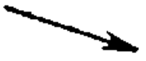


ولی، منحنی «انحنا» دارد، نرم است ؛ نقطه‌ای را که گرفته‌ایم از زیر دست می‌لغزد وهیچ‌پاسخ‌مشخصی‌نمی‌دهد. ولی ما ازمیدان درنمی‌رویم، احساس مانباید نادرست باشد، منحنی حتماً در این نقطه‌ای که انتخاب کرده‌ایم، امتدادی دارد؛ بیجهت نبود که دربارهٔ شیب منحنی‌صحبت کردیم.

فیلم را به‌عقب می‌بریم تاجایی که منحنی هنوز ، اینطور هموار نشده بود وروی آن، نقطهٔ معینی از منحنی را انتخاب می‌کنیم:



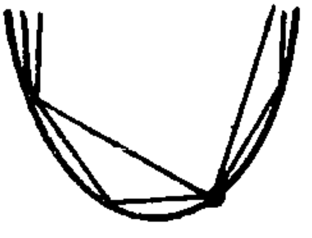
در نقطه‌ای که نشان کرده‌ایم، یك «شکستگی» ، یك «تغییرجهت» وجود دارد و روشن است که‌منحنی در آنجا، امتداد مشخصی ندارد. قبل از این نقطه، جهت، اینطور است:



وبعد از آن، اینطور:



ودر خود این نقطه، جهت خط عوض می‌شود. حالا، فیلم را کمی به‌جلو می‌بریم، تا جاییکه تعداد بیشتری از نقطه‌هـای بینابینی هم، وارد عمل شده‌اند:



در اینجا، شکستگی، کمتر شده است:



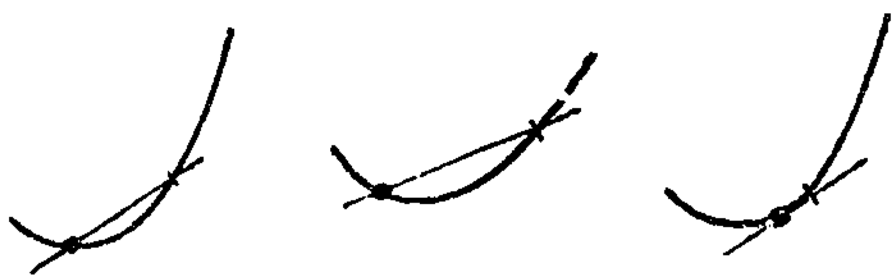
و دو امتدادی که‌در این نقطه به هم‌رسیده‌اند، تفاوت کمتری دارند.

اگر بازهم، نقطه‌های بینابینی را زیاد وزیادتر کنیم، نمی‌توانیم شکل را به خوبی نشان دهیم، ولی، می‌تـوانیم حالتهایی را تصورکنیم که درآنها،منحنی مرتباً هموارو هموارتر شود و درنتیجه اختلاف‌امتدادها

در قبل وبعد از نقطه، کمتر و کمتر شود.

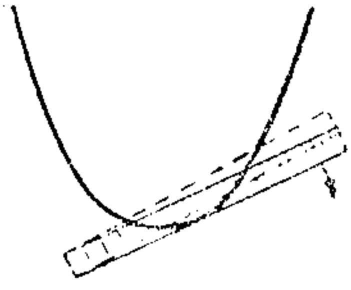
وامتدادمنحنی در این نقطه،عبارتستازهمین‌امتدادمشترکی که‌از نزدیك شدن دوضلع دو طرف آن، وقتی منحنی به اندازهٔ کافی هموار می‌شود، بدست می‌آید.

اگر قبول کنیم، دوپاره خطی‌که در این نقطه به‌هم می‌رسند، در واقع به‌سمت یك امتداد میل‌کنند، آنوقت می‌توانیم ، یکی از آنها را انتخاب‌کنیم وبررسی خود را رویآن انجام دهیم. نقطه‌ای روی‌منحنی در نظر می‌گیریم، اگر بخواهیم، امتداد منحنی را در این نقطه پیداکنیم کافی است از آنجاخط راستی رسم کنیم که منحنی را در نقطهٔ دیگری قطع کند:

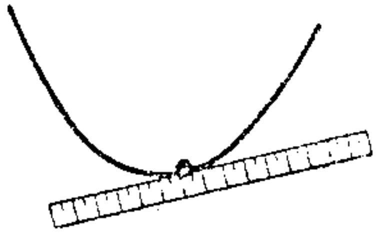


به این ترتیب، قاطعهای مختلفی بدست می‌آید.

هرچه نقطهٔ دوم را نزدیکتر به نقطهٔ اول بگیریم، پاره خط قاطع در داخل منحنی،کوچکتر می‌شود. اگر به‌جای خط قاطع، یك خط‌کش‌در نظربگیریم وآنرا به طرف بیرون منحنی دوران دهیم، به نحوی که‌یکی از نقطه‌های برخورد آن با منحنی، مرتباً به نقطهٔ خودمان نزدیك شود، بهتر می‌فهمیم که چه وضعی پیش می‌آید:



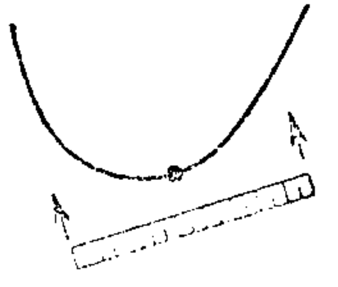
لحظه‌ای می‌رسد که نقطهٔ مجاور، برنقطهٔ‌خودمان منطبق می‌شود وخط کش در بیرون منحنی قرار می‌گیرد:



وقاطع، تبدیل به مماس می‌شود:



دراین لحظه، ماتوانسته‌ایم امتدادی را بدست آوریم که ضلع بالای خط شکسته، به‌سمت آن میل می‌کند. اگرهم خط‌کش را بـه ترتیب زیر بـه منحنی نزدیك کنیم



خط‌کش به منحنی و به‌نقطهٔ انتخابی مـا در روی آن، نزدیك می‌شود و لحظه‌ای فرا می‌رسدکه به آن می‌چسبد، وچون منحنی و خط‌کش مجاور یکدیگر قرار می‌گیرند، دارای یك امتداد هستند. وچقدر خوبست که از تکهٔ‌کوچکی از خط راست که ازوصل دونقطهٔ‌کاملاً نزدیك به هم منحنی بدست می‌آید، نجات پیدا کردیم، زیـرا خط راست، خاطرهٔ برخوردخود را با منحنی، تا بینهایت حفظ می‌کند وامتداد آن همیشه بی تغییرباقی می‌ماند.

مشتق

حالا دیگر می‌دانیم که منظور از امتداد یك منحنی هموار درنقطهٔ داده شده، چیست: این امتداد عبارتست ازامتداد مماسی که در این‌نقطه برمنحنی رسم شده است.

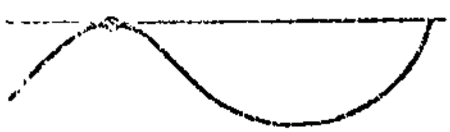
این امتداد را می‌توان‌به نحوی مشخص‌کرد ومثلاً به‌کمك‌نسبتی که برای تعیین شیب خاکریز، درنظر گـرفته بودیم. همین نسبت، کـه شیب مماس را معین می‌کند، عبارتست از مشتق.

وقتی‌که‌پیش‌از این، وازراه خالص جبری،نتیجه گرفتیم کـه یك مقطع مخروطی، می‌تواند ۰یا ۱ یا ۲ نقطهٔ مشترك بـا خط راست داشته باشد، به مفهوم مماس رسیده‌بودیم. درآنجا گفتیم که: اگرروی‌دوخط، تنها یك نقطهٔ مشترك وجود داشته باشد، درآنصورت خط راست برمقطع مخروطی مماس است. ولی، این حکم، تنها وقتی درست است‌که‌منحنی ما یك مقطع مخروطی باشد. این مطلب‌که خط راست مفروض، تنهایك نقطهٔ مشترك با منحنی‌دارد ، نمی‌تواند به عنوان خاصیت مشخص کنندهٔ مماس، درنظر گرفته شود. اگر مثلاً،منحنی گرهی‌داشته باشد:



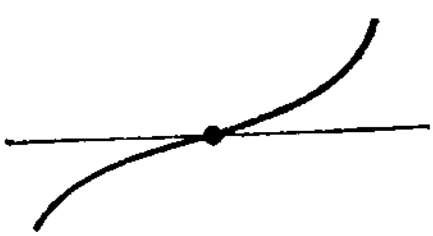
خط راستی که ازاین نقطهٔ گرهی می‌گذرد، ولواینکه تنها یك نقطهٔ مشترك با منحنی داشته باشد، نمی‌تواند مماس برمنحنی به‌حساب آید. به عبارت دیگر، امتداد چنین خطی را نمی‌توان به عنوان امتداد منحنی در این نقطه، به حساب آورد. به طورکلی، منحنی در این نقطه امتدادمشخصی ندارد؛ خط راستی که ماکشیده‌ایم حتی‌برامتداد راست نقطهٔ گرهی‌منحنی ویا بر امتداد چپ نقطهٔ گرهی منحنی، منطبق نیست.

در مورد منحنی



هم می‌بینید که خط راست، دو نقطهٔ مشترك بامنحنی دارد، باوجوداین، درنقطهٔ اول، برآن مماس است، زیرا در این نقطه، کاملاً مجاور منحنی است.

آنچه را که‌دربارهٔ مماس گفتیم، هنوز کافی نیست : خط راست ممکن است برمنحنی مماس باشد ودر عین حال در همان نقطه ، منحنی را قطع کند. مثلاً، این خط راست



درست درهمان نقطه‌ای که برمنحنی مماس است، از منحنی می‌گذرد و آنرا سوراخ می‌کند. ولی درعین حال این خط راست،بدون هیچ‌نقصی هم از طرف پایین و هم از طرف بالا، به‌منحنی چسبیده است وبنابراین هیچ دلیلی ندارد که آنرا مماس به‌حساب نیاوریم.

به همین مناسبت است که‌باید مماس‌را حد قاطعی‌دانست،وقتی‌که نقطه‌های برخورد آن بامنحنی به‌هم نزدیك ونزدیکتر شود. این وضع در مورد دومثال اخیر هم درست است وشمامی‌توانید به‌کمك خط‌کش،آنرا آزمایش کنید.

به این ترتیب، اگـربخواهیم امتداد مماس را پیداکنیم، بـه‌هیچ ترتیبی نمی‌توانیم از بررسی دقیق وجدی قاطعهایی که کاملاً نزدیك‌به هم قراردارند، صرفنظر کنیم.

روشن است‌که کار باخط‌کش،نمی‌تواند روشی دقیق باشد؛ واگر مابخواهیم امتداد منحنی را به‌طور دقیق، معین کنیم، ومثلاً برای‌وضع یك قانون از آن استفاده کنیم، نمی‌توانیم برنتیجه‌ای‌که بـه‌کمك‌خط‌کش بدست می‌آید، تکیه کنیم. روشهای دقیق را نمی‌تـوان روی شکل جستجو کرد، بلکه باید به‌محاسبه متوسل شد.

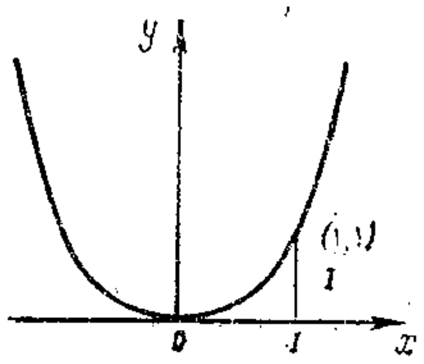
به یك مثال می‌پردازیم. فرض کنید که بخواهیم «رفتار» تابعی را که به وسیلهٔ معادلهٔ

$$y = x^{2}$$

معین شده است، روشن‌کنیم. مامی‌دانیم که«تصویر» آن، یك سهمی‌است حالا می‌خواهیم با دقت معلوم کنیم‌که مماس براین سهمی، در نقطهٔ به طول برابر ۱،چه امتدادی دارد.

مقدارعرض این نقطه برابر است با $y = 1^{2} = 1$ ، بنابراین،سهمی

ما از نقطهٔ (۱،۱) می‌گذرد. به‌جستجوی جهت مماس، درنقطهٔ(۱،۱)می‌رویم. شکل منحنی را به خوبی می‌شناسیم:



اینراهم می‌دانیم که از کجا بایـد آغاز کنیم. ابتدا، بایـد درکنار نقطهٔ (۱،۱)،نقطه‌های همسایه‌ای را انتخاب کنیم که‌مرتباً به‌آن نزدیکترشوند. بعد قاطعهایی رسم کنیم که هرکدام از آنها از نقطهٔ (۱،۱) ویکی از این نقطه‌های همسایه بگذرد وامتدادهای این قاطعها را مشخص کنیم. ایـن امتدادها، بانسبتهایی شبیه موردی‌که شیب مسیرراه‌آهن رامعین‌می‌کردیم بدست می‌آید. وبالاخره‌می‌بینیم که وقتی قاطعها بـه سمت مماس میل می‌کنند، امتداد آنها، به چه چیزی نزدیك می‌شود.

نقطه‌های همسایه را، به این ترتیب انتخاب می‌کنیم که اول بـه اندازهٔیك واحد،سپس‌به‌اندازهٔیکدهم،بعد به اندازهٔ یکصدم، بعدبه اندازهٔ یکهزارم، از نقطهٔ (۱،۱) به طرف راست می‌رویم وغیره. در اینصورت طولهای این نقطه‌های همسایه، به ترتیب، چنین می‌شوند:

۲؛ ۱/۱؛ ۱/۰۱؛ ۱/۰۰۱ ؛...

عرضهای این‌نقطه‌هاراهم، می‌توان‌پیدا کرد. این عرضهابه ترتیب چنین می‌شوند:

$۲^۲=۴؛ ۱/۱^۲=۱/۲۱؛ ۱/۰۱^۲=۱/۰۲۰۱؛ ۱/۰۰۱^۲=۱/۰۰۲۰۰۱؛...$

حالا، چندنکته را یادآوری می‌کنیم تا ضمن بررسی پرسشهای مهمتر، به خاطر چیزهای جزئی، معطل نشویم. ما، از ساده کردن کسرها، اطلاع داریم و می‌دانیم که می‌توان صورت و مخرج یك کسررا بر یك عدد تقسیم کرد. اگر مثلاً، بعداز ساده کردن به ۲، بدست بیاوریم : $\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$، روشن است که عکس آنرا هم می‌توان انجام داد، یعنی: $\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۸}$. بنابراین، صورت و مخرج یك کسر را دریك عدد، ضرب هم‌می‌توان کرد. البته، معمولا باچنین عملی، به‌کسر مفصلتری می‌رسیم، می‌توان ازاین قاعده، برای حالتهایی که مثلاً باکسر نا مطبوع

$$\frac{۰/۲۱}{۰/۱}$$

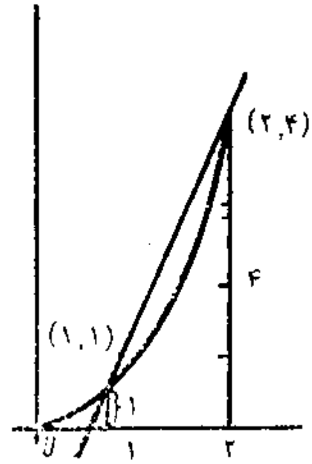
سروکارداریم، استفاده کرد. اگرصورت ومخرج این کسررادرعدد ۱۰ ضرب کنیم، بدست می‌آید:

$$\frac{۰/۲۱}{۰/۱}=\frac{۲/۱}{۱}=۲/۱$$

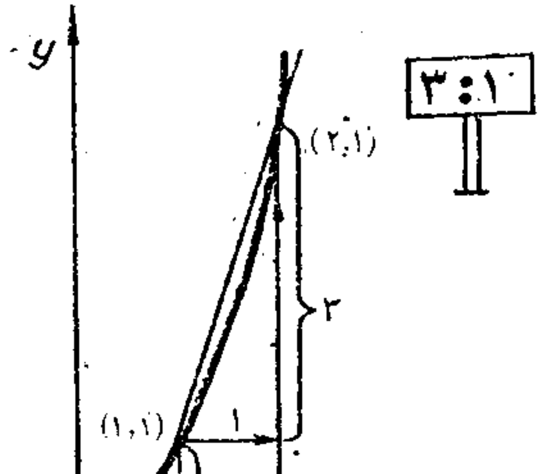
درست به همین ترتیب، اگر صورت ومخرج کسر $\frac{۰/۰۲۰۱}{۰/۰۱}$ رادر ۱۰۰ ضرب کنیم، بدست آید:

$$\frac{۰/۰۲۰۱}{۰/۰۱}=\frac{۲/۰۱}{۱}=۲/۰۱$$

حالا، می‌توانیم به مسالهٔ خود برگردیم. نخستین نقطه‌ای که به‌عنوان نقطهٔ مجاور خود، یعنی نقطهٔ (۱،۱) در نظر می‌گیریم به طول ۲ وبه‌عرض $۴=۲^۲$ است. از این نقطهٔ (۲،۴) و از نقطهٔ اولیهٔ (۱،۱)، نخستین قاطع را رسم می‌کنیم:



ابتدا، امتداد این قاطع را پیدا می‌کنیم. اگر ازنقطهٔ (۱،۱) به‌اندازهٔ یك واحد به‌طرف راست برویم،وسپس، از آنجا، سه‌واحد ـ به اندازهٔ اختلاف دوعرض ـ به طرف بالا برویم، به نقطهٔ (۲،۴) می‌رسیم. این مطلب، در شکل جدیدی که رسم کرده‌ایم، روشن‌تر دیده می‌شود:

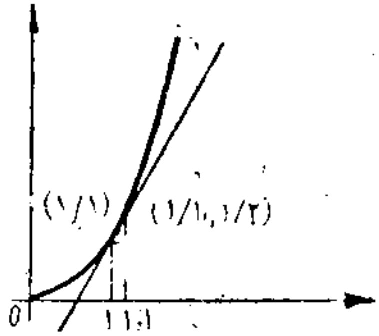


به این ترتیب، شیب قاطع اول بدست می‌آید:

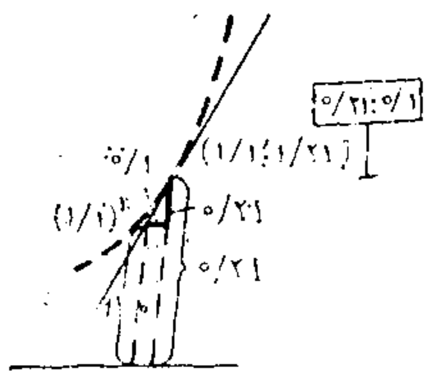
$$۳ : ۱ = \frac{۳}{۱} = ۳ = ۲ + ۱$$

حالا، به نقطهٔ همسایه بعدی می‌پردازیم که برای آن $x = ۱/۱$ و همانطور که قبلاً هم محاسبه کردیم، $y = ۱/۲۱$ بود، یعنی نقطهٔ (۱/۱،۱/۲۱)

از ایـن نقطه ونقطهٔ اولیه قاطعی رسم می کنیم، می‌بینیم کـه پـاره‌خط بین دونقطه ، خیلی کوچك شده است و دارد با منحنی مخلوط‌می‌شود:



قسمت متناظر شکل را به کمك ذره‌بین نگاه می کنیم:



چقدر باید به طرف راست برویم؟ به‌اندازهٔ ۰/۱، یعنی به اندازهٔ اختلاف طولها، عرض نقطهٔ‌دوم چقدر از عرض نقطهٔ اول بیشتر است؟ به‌اندازهٔ اختلاف‌عرضها، یعنی $۱/۲۱ - ۱ = ۰/۲۱$.وشیب‌قاطع دوم برابر است‌با

$$۰/۲۱ : ۰/۱ = \frac{۰/۲۱}{۰/۱} = ۲/۱ = ۲ + \frac{۱}{۱۰}$$

به نقطهٔ همسایهٔ بعدی می‌پردازیم، که درآن $x = ۱/۰۱$ و، همانطور که می‌دانیم، $y = ۱/۰۱^{۲} = ۱/۰۲۰۱$. در اینجا به ذره‌بینی‌احتیاج‌داریم که قدرت بزرگ‌نمائی آن خیلی زیادباشد. ولی، در اینجا می‌توان‌به شکل

هم مراجعه نکرد، زیرا از آنچه‌که تاکنون دیدیم، معلوم می‌شود که‌باید تفاضل عرضها را بـرتفاضل طولها تقسیم کرد. بـرای نقطهٔ اخیر ونقطهٔ (۱و۱)، تفاضل عرضها برابر

$$۱/۰۲۰۱ - ۱ = ۰/۰۲۰۱$$

وتفاضل طولهابرابر

$$۱/۰۱ - ۱ = ۰/۰۱$$

می‌شود وبنابراین، شیب قاطع سوم برابر است با

$$\frac{۰/۰۲۰۱}{۰/۰۱} = ۲/۰۱ = ۲ + \frac{۱}{۱۰۰}$$

اگر همین روش را ادامه دهیم، متوجه می‌شویم که‌نسبت اختلاف‌عرضها به‌اختلاف طولها ، کـه شیب قاطعها را معین می‌کند ، بـه‌ترتیب چنین می‌شود:

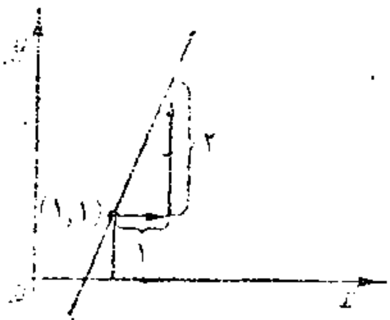
$$۲+۱،\ ۲+\frac{۱}{۱۰}،\ ۲+\frac{۱}{۱۰۰}،\ ۲+\frac{۱}{۱۰۰۰}،\ \ldots$$

می‌بینیم که دنبالهٔ

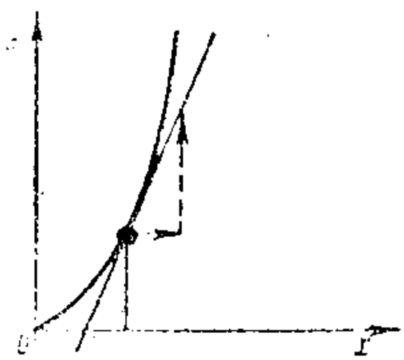
$$۱،\ \frac{۱}{۱۰}،\ \frac{۱}{۱۰۰}،\ \frac{۱}{۱۰۰۰}،\ \ldots$$

به سمت صفرمیل می‌کند ومثال مربوط به شکلات را به خاطر می‌آورد. بنابراین، عدد ۲، درست همان مقداری است که جمله‌های این دنباله ، مرتباً به‌آن نزدیك می‌شود. ازطرف دیگر، این جمله‌ها ، شیب قاطعهایی است که بـه مماس نزدیك می‌شوند . درنتیجه شیب، مماس برسهمی‌در

نقطهٔ (۱،۱)، برابر است با ۲، یعنی $\frac{2}{1}$. بادردست داشتن شیب، می‌توان مماس را رسم‌کرد:



واگر سهمی را بانقطه‌های بینابینی بیشتری رسم کنیم، متوجه می‌شویم که درواقع هم، این خط راست برسهمی مماس است،



اگرچه رسم‌شکل نمی‌تواند به‌طورکامل دقیق باشد، ما دست‌کم‌توانستیم روش محاسبه‌ای دقیقی، برای تعیین مماس، پیداکنیم. معلوم شدکه‌باید نقطه‌ای در همسایگی نقطهٔ مـورد نظرمان در روی منحنی انتخاب کنیم سپس‌نسبت تفاضل عرضها برتفاضل طولهای این دونقطه را بدست‌آوریم وببینیم، وقتی‌کـه نقطهٔ همسایه را بـه نقطهٔ خودمان، مرتباً نـزدیك و نزدیکتر می‌کنیم، این نسبت تفاضلها، به سمت‌چه مقداری میل‌می‌کند.

این مقداری که نسبت تفاضلها بـه سمت آن میل‌می‌کند، مشتق

نامیده می‌شود (برای اینکه دراین‌نامگذاری، روی‌بستگی‌جدی‌آن‌بانسبت تفاضلها، تکیه شود، می‌توان از اصطلاح نسبت دیفرانسیلی استفاده‌کرد، که البته ریشهٔ لاتینی دارد). مشتق، همانطور که پیش از اینهم گفتیم، عبارتست از روش محاسبه‌ای جستجوی مماس برمنحنی هموار؛ که از آن می‌توانیم برای بررسی «رفتار» منحنی استفاده کنیم.

برای نقطه‌های‌دیگر منحنی هم، به‌همین ترتیب و با دقت‌می‌توان از این روش استفاده‌کرد. اگر منحنی هموار باشد، باید درهر نقطهٔ آن، مماس معینی وجود داشته باشد. شیب سهمی در نقطهٔ (۲،۴) که بالای نقطهٔ (۱،۱)قراردارد، زیادتر است. اگرنسبت تفاضلهارا برای نقطه‌هایی که مرتباً به نقطهٔ (۲،۴) نزدیك می‌شوند، محاسبه کنیم، وقتی که طول این نقطه‌ها را به ترتیب

$$x = ۲+۱،\ ۲/۱،\ ۲/۰۱،\ ۲/۰۰۱،\ \ldots$$

بگیریم، به چنین دنباله‌ای می‌رسیم:

$$۴+۱،\ ۴+\frac{۱}{۱۰}،\ ۴+\frac{۱}{۱۰۰}،\ ۴+\frac{۱}{۱۰۰۰}،\ \ldots$$

بنابراین، ۴،همان عددی‌است‌که دنبالهٔما، مرتباً به آن نزدیك می‌شود، یعنی شیب مماس در نقطهٔ (۲،۴) برابر است با $\frac{۴}{۱}=۴$، واین بزرگتر از شیب مماس در نقطهٔ (۱،۱) است (در آنجا، شیب مماس برابر $\frac{۲}{۱}=۲$ بود).

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کردکه شیب مماس درنقطهٔ$x=۳$ برابر ۶ ودر نقطهٔ $x=۴$ برابر ۸ ودر نقطهٔ $x=۵$ برابر۱۰ است.به‌طور

کلی،شیب مماس‌در هرنقطهٔ سهمی،برابر است با دوبرابر طول این‌نقطه.
این مطلب رامی‌توان به این‌ترتیب بیان‌کرد: مشتق تابع

$$y = x^{2}$$

برای هر مقدار دلخواه x برابراست با

$$2x$$

وبه این ترتیب،نوع حرکت‌ورفتار سهمی، به‌طورکامل دراختیارماست.

برای اینکه، نقطهٔ‌آغاز مشخصی را معین کنیم، کافی است‌توجه کنیم‌که سهمی ما، ازنقطهٔ صفر می‌گذرد. در واقع، اگر $x = 0$، آنوقت $y = x^{2} = 0$. مشتق، ترتیب بقیه چیزها را برای ما خواهدداد.

مثلاً، اگر x عددی منفی باشد، دوبرابر مقدار x، یعنی 2x،هم عددی منفی خواهدبود.درچنین‌نقطه‌ای باید مماس نزولی باشد،درنتیجه خودمنحنی‌هم که به مماس چسبیده است، نزولی می‌شود.

اگر x عددی مثبت باشد، دو برابر آن نیز عددی مثبت می‌شود ودرچنین نقطه‌ای، منحنی صعودی است.

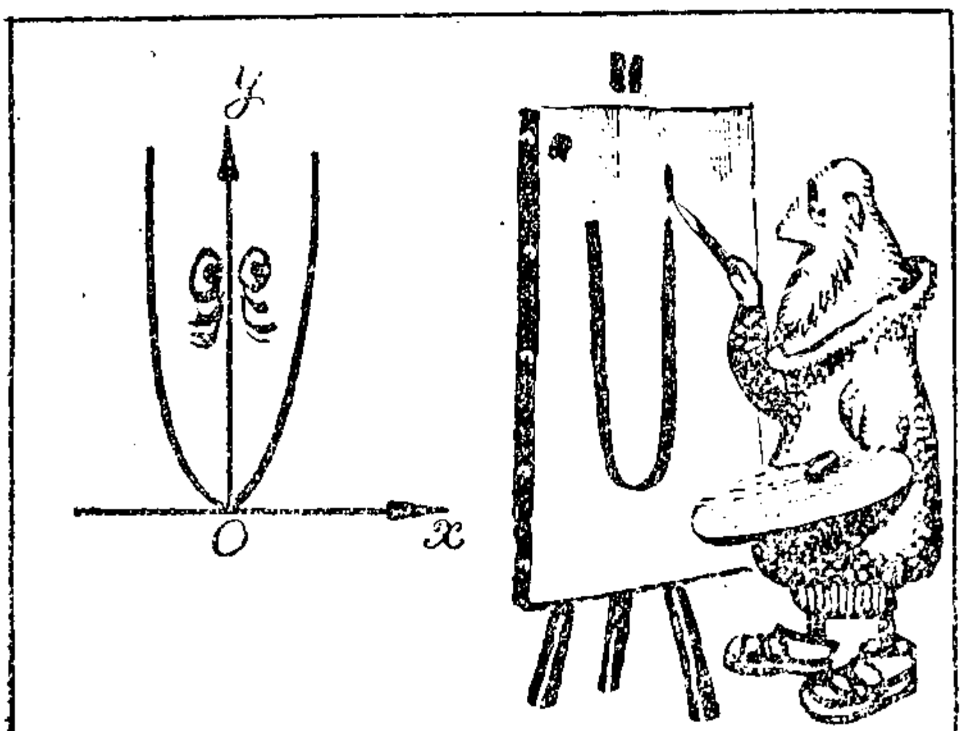
اگر $x = 0$ ، دوبرابر آن 2x هم برابر صفر می‌شود. وبنابراین ، منحنی درنقطهٔ صفر، مماسی با شیب برابرصفر دارد؛ وسرازیری باشیب ۰، چیزی‌جزخط افقی نیست،که در موردمنحنی‌ما، همان محور x است.

اگر قدر مطلق x بزرگ شود، دوبرابر آن بیشتر بزرگ می‌شود وبنابراین سرازیری منحنی هم افزایش پیدا می‌کند.

ازاینجا می‌توان نتیجهٔ زیررا دربارهٔ «ریخت» منحنی بدست‌آورد منحنی درسمت چپ نقطهٔ صفر، فرومی‌آید؛ درنقطهٔ صفر، به لحظهٔ افقی بودن می‌رسدوبه محور x می چسبد؛ ودرسمت راست نقطهٔ‌صفر،به طرف

بالا می‌رود ، یعنی صعودی است. به‌این‌ترتیب، پایین‌ترین نقطهٔ منحنی، نقطهٔ صفراست، وهرچه ازاین‌نقطه دورترشود،درهردوبازوی خود،شیبی تندتر پیدا می‌کند.

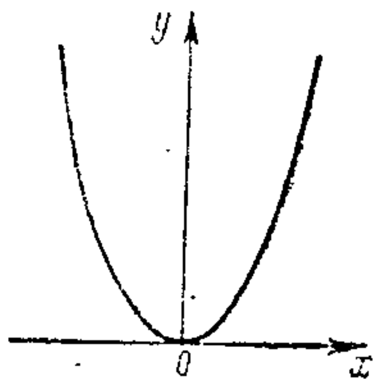
ماهمهٔ اینهامی‌رادانستیم، زیراقبلاً هم‌به‌رفتاروخصوصیت سهمی علاقمند بودیم؛ باوجود این، درحالتی که از کیفیت وخاصیت تابعی، زیاد اطلاع‌نداشته باشیم، مشتق،تمام‌آگاهیهای لازم را به‌مامی‌دهد.حتی آگاهیهای مادر بارهٔ سهمی هم، وقتی که بامشتق آشناباشیم، زیادتر می‌شود. قبلا، ضمن‌بحث «منحنیهای حرارتی» متوجه شدیم که«سیمای» تابع ۲x عبارتست از خط راست(واین هیچ تعجبی ندارد، زیرا با تابعی درجهٔ اول سروکار داریم . همچنین توجه می‌کنیم که این تابع، به‌طور یکنواخت‌رشدمی‌کند. ازاینجا، به‌سادگی‌نتیجه‌می‌شودکه، گرچه‌شیب‌منحنی



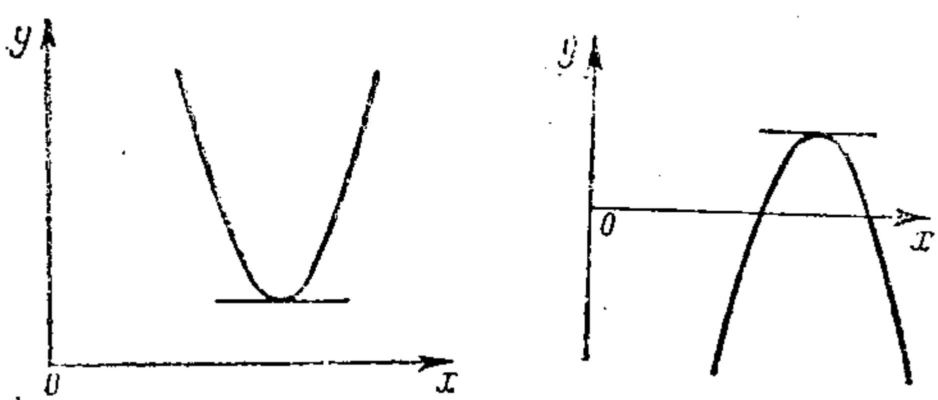
و سرازیری آن، در هرطرف نقطهٔ صفر ، به تدریج اضافه‌می‌شود، ولی، این زیادشدن سرازیری وشیب ، تندویکباره نیست ، بلکه به آرامی وبا آهنگ ثابتی پیش می‌رود.

ماکزیمم ومی‌نیمم

روشن است که سهمی را می‌توان بـه صورتهایی که متفاوت‌بـا حالت معمولی باشد، نشان داد:



مثلاً، سهمی ممکن است به این‌ترتیب قرار گرفته باشد:

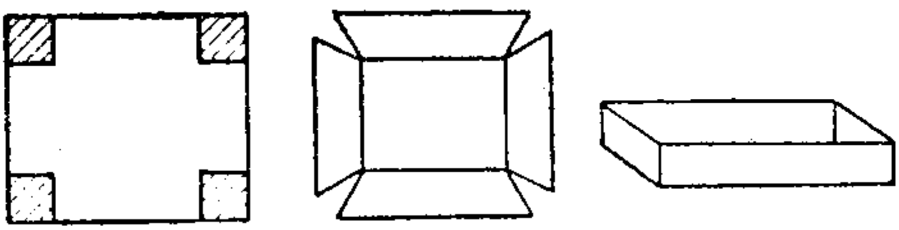


درچنین حالتهایی، پرسشی‌بسیاراساسی‌وقابل بحث پیش‌می‌آید: پایین‌ترین ویا بالاتریـن نقطهٔ سهمی، کجا قـرار گرفته است؟ مشتق، ایـن نقطه‌را

بلافاصله معین می‌کند، زیرا مماس برسهمی در این نقطه، بایدافقی باشد.

جستجوی پایین‌ترین ویابالاترین نقطه‌ها (که بازبان نظریهٔتابعها، تعیین ماکزیمم ومی‌نیمم تابع نامیده‌می‌شود)، زمینهٔ گسترده‌ای رابرای تعداد زیادی از بررسیهای گوناگون دربرابر ما قرارمی‌دهد.

فرض کنید که از یك برگ کاغذ مربع شکل یك قوطی بسازیم، به این‌ترتیب که‌از گوشه‌های آن، مربعهای کوچکی راجداکنیم وقسمتهای برآمده را، که به این ترتیب بدست آمده است، به طرف بالا خم کنیم:



می‌خواهیم ببینیم، ضلع هرکدام از مربعهای کوچك را چقدر بگیریم تا حداکثر حجم، برای قوطی که درست کرده‌ایم، بدست آید.

ما، طول ضلع مربع کوچك را نمی‌دانیم وبه همین مناسبت آنرا x می‌گیریم. به‌سادگی می‌توانیم بستگی بین حجم قوطی و x را پیدا کنیم. یك چیزروشن‌است: وقتی‌که x کوچك باشد، یعنی‌وقتی که‌مربعهای کوچکتری از صفحه جدا کنیم، قوطی ما باطول وعرض بزرگتر ولبهٔ کوچکتر بدست می‌آید؛ و وقتی که مربعهای بزرگتری را جداکنیم، یعنی وقتی که‌کف قوطی را کوچکتر بگیریم، قوطی‌ما، بلندتر می‌شود. به‌این‌ترتیب، x بایدنه‌خیلی کوچك ونه‌خیلی‌بزرگ‌باشد، مقداری‌راکه‌برای x جستجومی کنیم، بایددرمیانه‌های‌راه‌دومرزباشد. دراین راه نیمه‌تاریکی‌که کورمال کورمال جلو می‌رویم، مشتق می‌تواند جواب کاملاً دقیق رابه ما بدهد: با به‌کارگرفتن مشتق، معلوم می‌شودکه حداکثر حجم ، وقتی

برای قوطی ما بدست می‌آید که طول ضلع مربع کوچك، درست برابر با يك ششم طول ضلع مربع بزرگ باشد.

گلوله را می‌اندازیم؛ ولی پیش از آنکه‌آغازکنیم، می‌کوشیم از قبل بدانیم که درکجا می‌افتد. واین مشتق است که پاسخ این پرسش را به‌ما می‌دهد وبیجهت نیست که اینقدر به آن اهمیت می‌دهیم.

مساله‌های گوناگونی از این قبیل وجود دارد.

به منحنی تابعی می‌پردازیم که شناخت ما از آن، حتی بدتر از سهمی است. مثل قبل، در اینجا هم می‌توانیم بـه‌کمك نسبت تفاضلها معلوم کنیم که در هر نقطه از منحنی که به وسیلهٔ معادلهٔ

$$y=x^۳$$

مشخص می‌شود،شیب مماس برابر است باسه برابر مجذورطول این‌نقطه؛ یعنی، مشتق این تابع برابر است‌با

$$۳x^۲$$

از این موضوع، چه نتیجه‌هایی می‌توان بدست آورد؟

برای اینکه، نقطهٔ‌آغازرا بیابیم،توجه می‌کنیم‌که از خودمنحنی نتیجه می‌شودکه اگر $x=۰$ ،آنگاه $y=۰$. به این ترتیب، این منحنی هم، از نقطهٔ صفر می‌گذرد.

حالا، به ندای مشتق‌گوش می‌کنیم: می‌بینیم که درآن، مجذور x وجود دارد (یعنی «تصویر» مشتق، عبارتست از يك سهمی)، از همین جا، می‌توان به‌این نتیجه‌ها رسید:

اولاً،درمنحنی $y=x^۳$، بارشدیکنواحت‌شیب‌سروکارداریم؛ به‌همان ترتیب که منحنی از نقطهٔ صفر دور می‌شود، شیب آن، خیلی تندتر و

طوفانی‌تر، افزایش پیدا می‌کند.

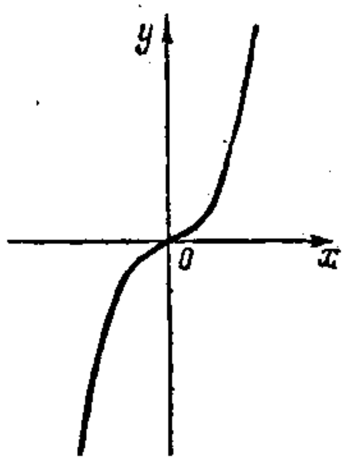
نتیجهٔ دیگر اینست: بدون بستگی به‌مثبت یا منفی بودن طول،ما با x^2 سروکارداریم که همیشه مثبت است؛ بنابراین، منحنی چه درسمت راست نقطهٔ صفر وچه درسمت چپ آن، صعودی است.

منحنی ار نقطهٔ صفر می‌گذرد. این منحنی ازپایین وسمت‌چپ نقطهٔ صفر آغاز می‌شود تا زمانی‌که مقدار تابع، زیر صفر است، یعنی‌تا وقتی که منحنی زیرمحور x است، می‌تواند صعودکند.

در سمت راست نقطهٔ صفر هم، منحنی روی محور x ، صعودی است. یعنی، منحنی، محور x را درنقطهٔ صفر، قطع می‌کند. دراین‌ضمن اگر $x=0$، آنگاه $3x^2=3\times 0^2=0$. به زبان دیگر، شیب مماس در نقطهٔ صفر، برابر صفر است، یعنی مماس در این نقطه، افقی است. وخط افقی که از نقطهٔ صفر هم گذشته باشد ، چیزی جز همان‌محور x نیست. بنابراین، محور x ، در همان‌نقطه‌ای‌که برمنحنی مماس است، ازمنحنی عبور کرده است (یعنی در نقطهٔ صفر) . ضمن اینکه منحنی به این نقطه نزدیك می‌شود، شیب آن مرتبا کمتر می‌شود؛ وقتی که به‌این نقطه‌می‌رسد، مثل اینکه نیروی خود را از دست داده باشد ، لحظه‌ای استراحت می‌کند ودوباره به طرف بالا حرکت می‌کند، ابتدا باکندی وسپس با نیرویی بیشتروبیشتر.

به این ترتیب، به تقریب، طرح ابتدای صفحهٔ بعدبدست می‌آید.

حالا،به رسم منحنی تابعی که در آن‌از $y=x^3$ صحبت‌شده است، می‌پردازیم :



برای $x=0$ داریم: $y=0^3=0$،

برای $x=1$ داریم: $y=1^3=1$،

برای $x=2$ داریم: $y=2^3=8$،

برای $x=-1$ داریم: $y=(-1)^3=-1$،

برای $x=-2$ داریم: $y=(-2)^3=-8$،

چند مقدار بینابینی تابع را هم حساب می‌کنیم:

برای $x=\frac{1}{2}$ داریم: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$،

برای $x=-\frac{1}{2}$ داریم: $y=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$،

برای $x=\frac{1}{4}$ داریم: $y=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$،

نقطهٔ $\frac{1}{64}$ را نمی توان با مدادی که منحنی را رسم می‌کنیم، مشخص کرد. روی شکل، این نقطه، عملاً برمحور x قرار می‌گیرد. بنابراین، درنقطه‌های

$$0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2$$

به ترتیب به اندازهٔ

$$۰,\frac{۱}{۸},۱,۸$$

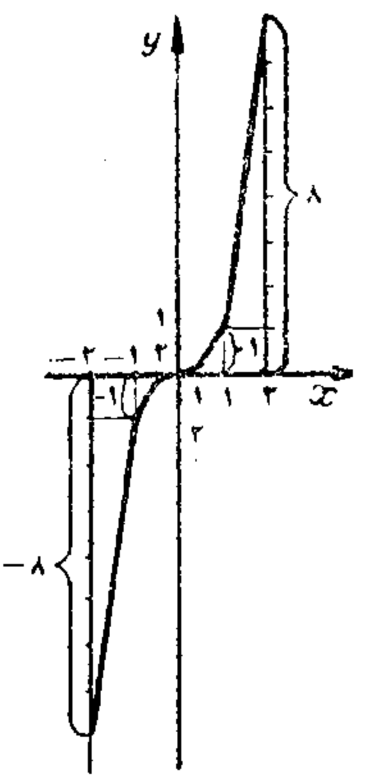
واحد به طرف بالا می‌رویم و سپس، در نقطه‌های

$$-\frac{۱}{۲},-۱,-۲$$

به ترتیب، به اندازهٔ

$$-\frac{۱}{۸},-۱,-۸$$

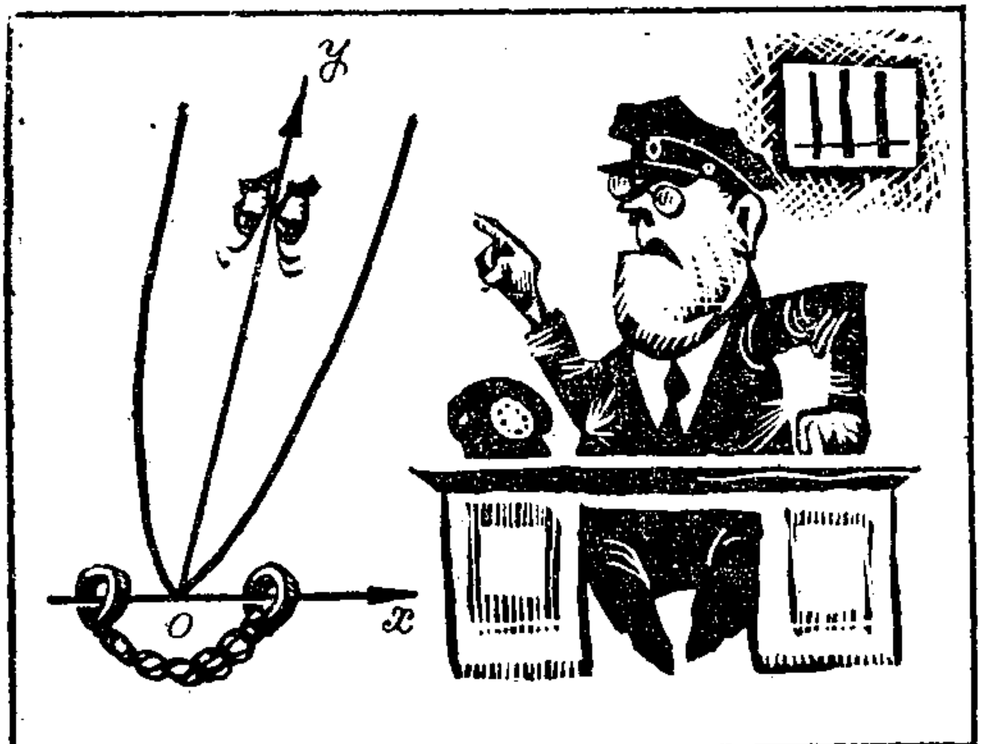
واحد، به طرف پایین:



واین، در واقع همان تصویری است که قبلاً به کمک مشتق شرح دادیم. منحنی، در نقطه‌های بینابینی، هیچگونه انحرافی پیدا نمی‌کند، زیرا،

مشتق باآگاهیهایی که می‌دهد، ما را دراین مورد مطمئن می کند. مشتق، نه تنها، طرح کلی تصویر را به ما می‌دهد ، بلکه امتداد منحنی راهم در هر نقطهٔ آن به طور دقیق، معلوم می کند.

بیجهت نیست که وقتی ریاضیدان با یك تابع روبرو می‌شود، بلافاصله،مشتق آنرا پیدا می کند، وتا زمانی که‌همهٔ رازهای‌تابع‌راازربان آن نشنود، رهایش نمی کند.



ووقتی که فیزیکدان برای حل‌مشکل خود به یك تابع در قورخانهٔ غنی ریاضیات مراجعه می کند، ریاضیدان بلافاصله، مشتق این تابع را هم به‌او می‌دهد تا دستورالعمل دقیقی برای استفاده از تابع داشته باشد.

۱۷. پشه چو پرشد، بزند پیل را

انتگرالهای معین و نامعین

در زندگی، اغلب به‌ضرب نیازداریم، وبه همین مناسبت، جدول ضرب را حفظ کرده‌ایم. به کمك ضرب، به سادگی می‌توانیم نتیجهٔعمل عکس را هم پیدا کنیم : مثلاً، ۵ همان عددی است که‌اگر در ۴ ضرب شود، عدد ۲۰ بدست می‌آید.

به همین‌ترتیب،می‌توانیم عکس عمل مشتق را هم بشناسیم.فرض کنید تابع $2x$جلو ما باشد؛ بلافاصله به یادمان می‌آید که آنرا ازکجا می‌شناسیم! ولی، واقعاً ازکجا؟ بله، $2x$، مشتق تابع $y=x^2$ بود! در اینجا هم می‌توان از عمل‌عکس، گفتگو کرد: وقتی‌که تابعی رابه ماداده باشند، می‌توان این‌پرسش را مطرح کرد که‌آیا تابعی وجود ندارد که مشتق‌آن، همین تابع داده‌شده باشد، واگر وجود دارد، به‌چه‌ترتیب باید آنرا پیدا کرد. چنین تابعی را، انتگرال تابع داده شده گویند. مثلاً انتگرال $2x$، عبارتست از تابع $y=x^2$.

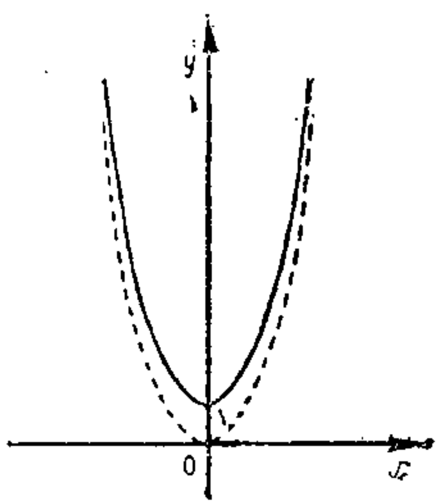
شبیه حل معادله‌ها، دراینجا هم روشهایی وجود دارد، که اگر نتواند بلافاصله‌تابع‌موردنظرراپیداکند ،دست‌کم کارجستجوی‌آنراساده‌تر کند. فرض کنید تابع x^2 به ما داده شده باشد. این تابع،خیلی‌به $3x^2$ شباهت دارد، که ما به‌خوبی می‌دانیم، مشتق تابع $y=x^3$ است. x^2، برای هرمقدار x برابراست بایك سوم $3x^2$. درنتیجه، x^2 هم بایدمشتق يك سوم x^3 باشد، یعنی مشتق تابع

$$y=\frac{x^3}{3}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که این جواب، درست است.

باهمهٔ اینها، در بسیاری موارد ، چنین روشهایی، کافی به نظر نمی‌رسد. باید روش کلی‌تری پیداکرد. به جز این، روشی راکه در اینجا شرح دادیم، عیب دیگری هم دارد. ازروی مشتق، مثلاً نمی‌توان‌فهمید که منحنی تابع $y=x^2$ از نقطهٔ صفر می‌گذرد وبرای آگاهی از این موضوع، باید به‌خود تابع مراجعه کرد. آیا می‌توان از اینجا نتیجه گرفت که برای ساختمان کامل ظاهر منحنی ، تنها وجود مشتق کفایت نمی‌کند؟

حقیقت هم همین است. اگر سهمی را به‌اندازهٔ یك واحد به‌طرف بالاببریم، موضوع برایمان روشن‌تر می‌شود:



روشن است که در جابه‌جائی معمولی، شکل منحنی تغییرنمی کند وشیب آن، درهرنقطه، به‌همان‌اندازه‌ای که بوده است، باقی‌می‌ماند. ولی، معادلهٔ منحنی تغییر می‌کند، زیرا عرض هرنقطهٔ آن ، به‌اندازهٔ یك واحد زیادتر می‌شود. بنابراین، مقدار y ، که‌تاکنون‌برابر x^2 بود، حالا، برابر x^2+1 می‌شود. به این ترتیب، معادلهٔ سهمی جا به جا شده، به صورت زیر

درمی‌آید:

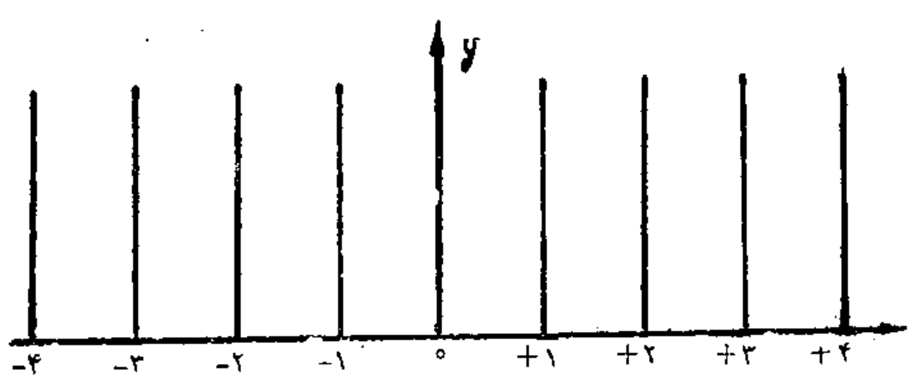
$$y=x^{۲}+۱$$

وقتی که ما تنها از امتدادهای لحظه‌ای منحنی، یعنی از مشتق، آگاهی داشته باشیم، نمی‌توانیم به‌این پرسش پاسخ دهیم که آیا صحبت‌برسراین منحنی است یامنحنی قبلی، یایکی از بینهایت منحنی‌که از راه جابه‌جا کردن سهمی‌بدست می‌آید. از این دیدگاه، مسالهٔ ما، نامعین است.

ولی، اگر دست کم یکی از نقطه های منحنی مورد نظررا به ما داده باشند، مسالهٔ ما، معین می‌شود. مثلاً، فرض کنیدکه به ما اطمینان داده باشند که منحنی، از نقطهٔ صفر می‌گذرد. درچنین صورتی، معلوم می‌شودکه‌بادردست‌داشتن مشتق$۲x$، گفتگوازهمان سهمی نخستین‌ماست.

مثال سهمی را با روش کلیتری بررسی می‌کنیم. فرض‌کنید که از انتگرال $۲x$ اطلاعی نداشته باشیم. به‌جستجوی یك منحنی‌می‌رویم که در مورد آن تنها می‌دانیم که از نقطهٔ صفرگذشته است وشیب مماس بر هر نقطهٔ آن، برابر است با $۲x$.

بازهم از شکل آغاز می‌کنیم، گرچه هدف ما اینست که روش محاسبه‌ای دقیقی پیداکنیم. محور x را به فاصله‌هایی تقسیم می‌کنیم



(ضمناً ، فرض کنید، طول هرفاصله برابر بایك واحد باشد) و ازهرنقطهٔ تقسیم،خطراستعمودیرسم می کنیم،تامقدارعرضهایی راکههنوزنمی‌دانیم روی آنها جدا کنیم.

می‌دانیم که درنقطهٔ $x=0$ منحنی، y هم برابر با صفر است. رسم منحنی را از همین نقطه‌آغاز می کنیم. البته، شکلی که بدست خواهیم آورد، کاملاً تقریبی است وتنها طرحی ازشکل واقعی تابع ما را ،نشان می‌دهد.

می‌دانیم کـه منحنی ، تنها در یك لحظه بـر مماس خود منطبق می‌شود وهمینکه مختصری ازنقطهٔ تماس دورشود، امتداد آن تغییرمی‌کند. مادر اینجا، به عنوان این فاصلهٔ لحظه‌ای، فاصله‌ای را درنظرمی‌گیریم که بین دوخط راست عمودی قرار دارد. مماس متناظر بـا نقطهٔ صفر را رسم می کنیم وفرض می کنیم که همین مماس، منحنی ما را در سمت راست‌نقطهٔ صفر تا محل برخورد آن باخط قائمی‌که از نقطه‌$+1$ گذشته است، ودر سمت چپ نقطهٔ صفر تا محل برخوردآن با خطقائمی که از نقطهٔ -1 گذشته است، نشان دهد.

دونقطه‌ای را، که از این راه بدست می‌آید، به عنوان نقطه‌هایی از منحنی مورد نظرمی‌گیریم که متناظر با مقادیر $x=+1$ و $x=-1$ باشد. سپس، دراین نقطه‌ها، مماسهای متناظر را رسم می‌کنیم وآنها را تا برخورد با خطهای قائم‌بعدی، امتداد می‌دهیم. دوباره نقطه‌های بدست آمده را، به‌عنوان نقطه‌هایی از منحنی، که متناظر با مقادیر $x=+2$ و $x=-2$ هستند، می‌گیریم.

باز هم، در هرکدام از نقطه‌های جدیـد، مماسهای متناظر بـا این

مقادیر را رسم می‌کنیم وادامه می‌دهیم‌تا قائمهای بعدی را قطع کنند و همینطور تا آخر. روشن است که همیشه مماسها را، با شیب مربوط به خودشان رسم می‌کنیم. در نقطهٔ $x=0$، شیب مماس برابر است با

$$2x=2\times 0=0$$

ودر نقطه $x=1$: $\quad 2x=2\times 1=2$

می‌دانیم‌که تابع $2x$ ، به‌طور یکنواخت، صعودی است. بنابراین، هربارکه‌به‌قائم‌بعدی می‌رسیم، شیب مماس‌به‌اندازهٔ دوواحد زیادمی‌شود، یعنی، اگراز $x=1$ آغازکنیم،این شیب به‌ترتیب، مقادیر۲،۴،۶،۸،... را اختیار می‌کند. به‌همین ترتیب، می‌توان روشن کرد که درسمت‌چپ نقطهٔ صفر،شیبهابه‌ترتیب برابرندبا ۲ـ، ۴ـ، ۶ـ،... بنابراین،در نقطه‌های

$$0,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2$$

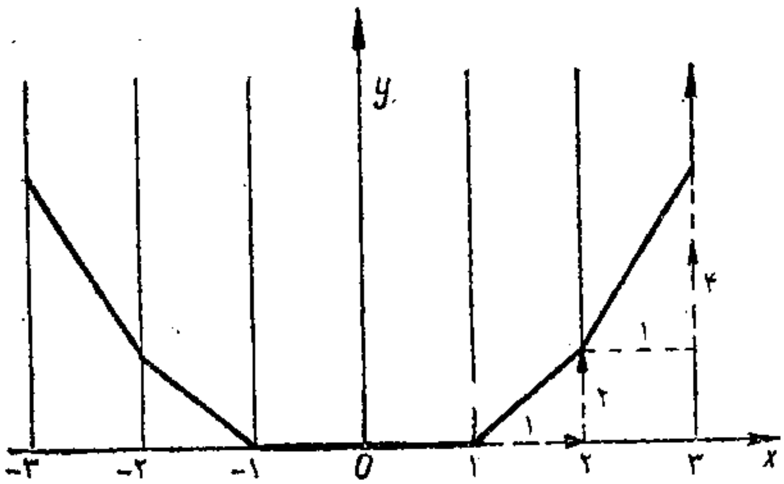
شیبها به ترتیب برابرندبا

$$0,\ 2,\ 4,\ -2,\ -4$$

ماخوب می‌دانیم که برای شیب ۲، یعنی $\frac{2}{1}$،بایدیك‌واحدبه‌سمت راست وسپس‌دوواحدبه طرف‌بالارفت. درست‌به‌همین‌ترتیب‌برای شیب ۲ـ، باید یك واحد به‌سمت‌چپ وسپس دو واحد به‌طرف بالا رفت. در نتیجه، ازنقطه‌های ۱+ و ۱ـ باید به‌اندازهٔ پاره خطهای برابر، به‌طرف‌بالاجدا کرد. واز همینجا معلوم می‌شودکه منحنی ما، یك شکل متقارن است. به این مناسبت،کافی است نیمهٔ سمت راست منحنی را بادقت‌مشخص‌کنیم،

که در اینصورت، رسم نیمهٔ سمت چپ آن، به سادگی بدست خواهدآمد.

حالا، می‌توانیم بـه خودشکل بپردازیم . شیب صفر در نقطهٔ صفر به معنای آنست کـه راه ما، افقی است. روی این خط افقی، بـه نقطهٔ ۱ می‌رسیم. از اینجا، باید با شیب $\frac{۲}{۱}=۲$ به طرف قائم بعدی برویم، واز اینجا، مسیر ما با شیب $\frac{۴}{۱}=۴$ ادامه می‌یابد:



به این ترتیب، استخوان بندی تصویر سهمی بـدست می‌آید کـه هنوز از اصل آن، خیلی دور است.

حالا ببینیم، نتیجه‌ای را که بـدست آورده‌ایم، تـاچه حد دقیق است، تحقیق را تنها در بارهٔ نقطهٔ $x=۳$ انجام می‌دهیم. عرض منحنی $y=x^۲$، در این نقطه، چنین است: $y=۳^۲=۹$

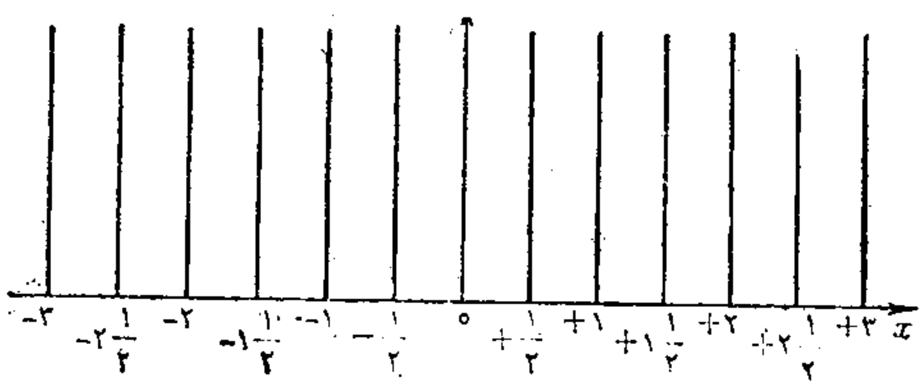
درست است که ماهنوز به این‌نتیجه نرسیده‌ایم که با تابع $y=x^۲$ سروکار داریم. باوجوداین،این‌موضوع، تاحدی وبه طور مبهم، برای ما معلوم است ومی‌توانیم ازآن برای روشن کردن دقت‌شکل استفاده‌کنیم. ببینیم اختلاف بین عرض خط شکستهٔ مـا در نقطهٔ $x=۳$ ، بـامقدار ۹ چقدر است.

شکل نشان می‌دهد که این عرض از مجموع ارتفاعهای همهٔ شیبها، باشروع از نقطهٔ صفر بدست می‌آید، یعنی

$$y = ۰ + ۲ + ۴ = ۶ = ۹ - ۳$$

سه واحد اختلاف ! واین، مقدار کمی نیست.

نقطه‌های تقسیم محور طول را به هم نزدیکتر می‌کنیم و در بین قائمهای قبلی، قائمهای تازه‌ای به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ رسم می‌کنیم :



شیب مماس درنقطهٔ صفر، همان صفرست (مماس، اقفی است). درنقطهٔ $x = \frac{۱}{۲}$ داریم:

$$۲x = ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

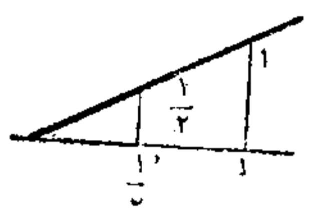
شیب، در فاصله‌های مساوی، به‌طور یکنواخت زیاد می‌شود، یعنی شیب درهرکدام ازنقطه‌ها، یك واحد از شیب درنقطهٔ قبل از آن، بیشتراست. به این‌ترتیب، در نقطه‌های

$$۰، \frac{۱}{۲}، ۱، ۱\frac{۱}{۲}، ۲، ۲\frac{۱}{۲}، -\frac{۱}{۲}، -۱، -۱\frac{۱}{۲}، -۲، -۲\frac{۱}{۲}$$

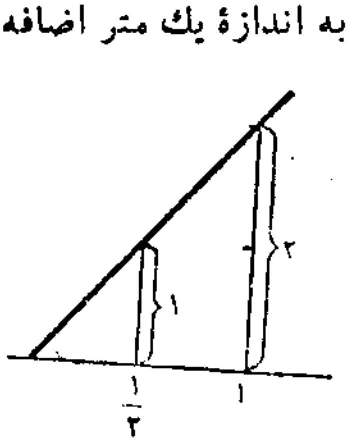
شیب مماس برابر است با

$$۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، -۱، -۲، -۳، -۴، -۵$$

پیش از آنکه به‌شکل بپردازیم، باید روند کار را مشخص کنیم. در نقطهٔ ۰، شیب برابر است با ۰؛ وبنابراین باید روی خط افقی حرکت کنیم تا به نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$ برسیم. تا اینجا، مثل‌سابق است. ولی ، در نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$،شیب‌برابربا۱،یعنی $\frac{۱}{۱}$ است، وبنابراین باید یك واحدبه سمت راست‌ویك واحد به طرف بالا جدا کنیم؛ ولی ما، خطهای قائم را به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ رسم کرده‌ایم، چطور می‌شود به اندازهٔ یك واحد کامل به طرف راست‌رفت! اگر تنها کمی روی این مطلب فکرکنیم، راه حل آن بسادگی بدست می‌آید؛ اگر شیب راه آهن برابر با $\frac{۱}{۱}$ باشد ، یعنی اگر با جلورفتن یك متر، به ارتفاع آن، یك متر اضافه شود، روشن است که در آنصورت، اگر $\frac{۱}{۲}$ متر جلو برویم، ارتفاع آن به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ متر زیاد می‌شود:



در حالتی هم که شیب برابر با $\frac{۲}{۱}=۲$باشد، به همین ترتیب می‌توان‌عمل کرد. اگر روی افق، نه یك متر، بلکه نیم متر جلو برویم، ارتفاع شیب نه به‌اندازهٔ دومتر، بلکه به اندازهٔ یك متر اضافه می‌شود:



به این ترتیب، وقتی که گامهایی‌به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ واحد به جلوبرداریم،هربار

باید به اندازهٔ نصف عدد شیب به طرف بالا حرکت کنیم. به زبان دیگر، ضمن خارج شدن از نقطه‌های

$$۰،\ \frac{۱}{۲}،\ ۱،\ ۱\frac{۱}{۲}،\ ۲،\ ۲\frac{۱}{۲}$$

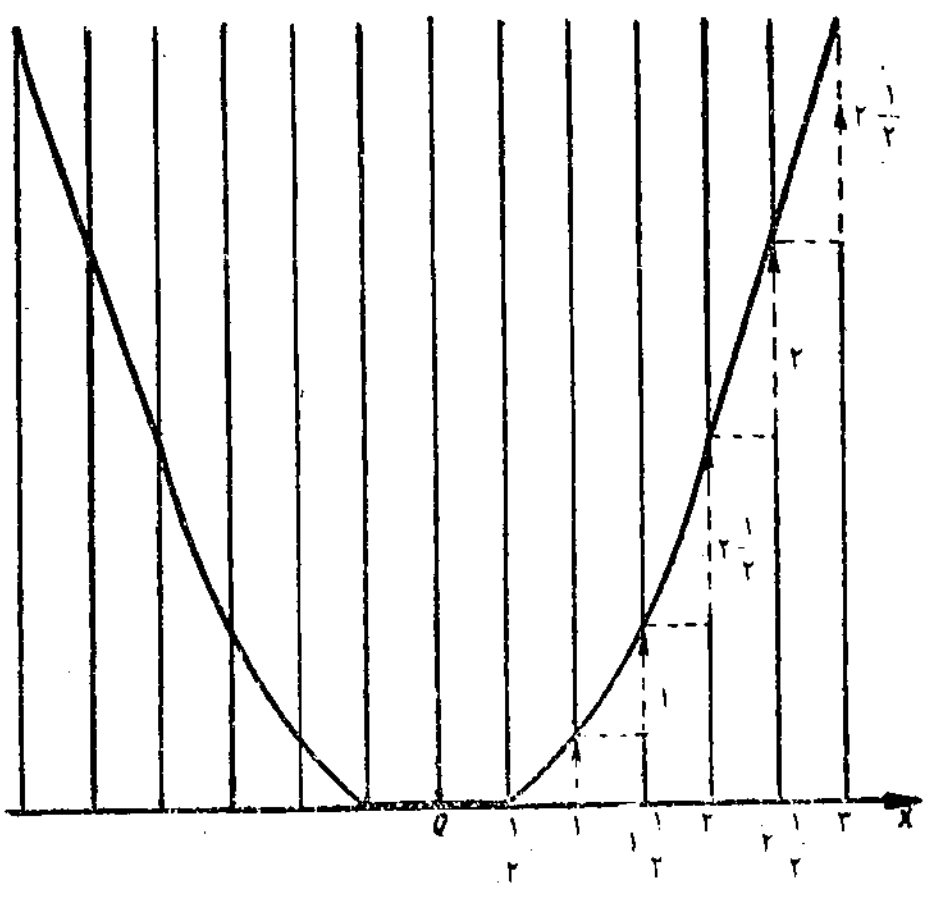
باید نه به اندازهٔ

$$۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵$$

واحد، بلکه به ترتیب به‌اندازهٔ

$$۰،\ \frac{۱}{۲}\times ۱ = \frac{۱}{۲}،\ \frac{۱}{۲}\times ۲ = ۱،\ \frac{۱}{۲}\times ۳ = ۱\frac{۱}{۲}،\ \frac{۱}{۲}\times ۴ = ۲،\ \frac{۱}{۲}\times ۵ = ۲\frac{۱}{۲}$$

واحد به طرف بالا برویم. همهٔ اینها را می‌توان روی شکل روشن کرد:



این شکل، خیلی به‌سهمی شباهت دارد و تنها در وسط آن ، قسمت نسبتاً بزرگی برمحور x منطبق شده است.

دوباره‌مقدار عرض را درنقطهٔ $x=۳$ محاسبه می کنیم: این‌عرض، نه ازمجموع‌شیبهای‌واقع بین‌نقطه‌های۰و ۱؛۱،۲؛۲،۳، بلکه ازمجموع نصف‌این مقادیر، بدست‌می‌آید. بهتراست‌که مقادیرشیبهارانه به‌صورت

$$۰،\quad \frac{۱}{۲}،\quad ۱،\quad ۱\frac{۱}{۲}،\quad ۲،\quad ۲\frac{۱}{۲}$$

بلکه به صورت

$$\frac{۱}{۲}\times ۰،\quad \frac{۱}{۲}\times ۱،\quad \frac{۱}{۲}\times ۲،\quad \frac{۱}{۲}\times ۳،\quad \frac{۱}{۲}\times ۴،\quad \frac{۱}{۲}\times ۵$$

بنویسیم، که از آنجا بدست می‌آید:

$$y=\frac{۱}{۲}\times ۰+\frac{۱}{۲}\times ۱+\frac{۱}{۲}\times ۲+\frac{۱}{۲}\times ۳+\frac{۱}{۲}\times ۴+\frac{۱}{۲}\times ۵$$

جملهٔ $۰\times\frac{۱}{۱}$ برابر ۰ است وبنابراین، می‌توان‌آنرا به حساب نیاورد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$y=(۱+۲+۳+۴+۵)\times\frac{۱}{۲}$$

واین مجموع داخل پرانتز را می‌توان بنابر قاعدهٔ شاگـردمن ورا ، ساده کرد .به‌جای اینکه، مجموع پنج عدد طبیعی نخستین را محاسبه کنیم، کافی است عدد وسط ، یعنی ۳ را، پنج برابر کنیم، که در نتیجه، عدد ۱۵ بدست می‌آید. نصف این عدد برابر $\frac{۱۵}{۲}$ می‌شود وبنابراین:

$$y=\frac{۱۵}{۲}=\frac{۱۸}{۲}-\frac{۳}{۲}=۹-\frac{۳}{۲}$$

اختلاف عـرض خط شکسته قبلی در نقطهٔ ۳=x با ۹، برابر ۳ بـود، در حالیکه در اینجا، این اختلاف برابر $\frac{۳}{۲}$ شده است.

مطالعهٔ منحنی از روی بندهایی که رسم کرده‌ایم واز روی‌شکلی که‌به‌هیچ‌وجه دقیق نیست، تنها می‌تواند منجر به‌نتیجهٔ‌غیردقیقی‌بشود، ما از روش محاسبه، تنها درنقطهٔ ۳=x استفاده کردیم. ولی بـا همین روش می‌توان مرتباً به نتیجهٔ بهتری رسید. روشن است کـه اگر تقسیم محور x را ، به قسمتهای بازهم کوچکتر، ادامه دهیم، مرتباً به منحنی که از راه محاسبه بدست آورده بودیم، نزدیکتر مـی‌شویم. گام بعدی، $\frac{۱}{۴}$ واحد است. ودوباره درنقطهٔ صفر، شیبی برابر ۰ بـدست می‌آید و در نقطهٔ $\frac{۱}{۴}$ داریم:

$$۲x=۲\times\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

یعنی، در فاصله‌های‌مساوی،مقدارشیب، همیشه بـه‌اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$زیادمی‌شود. در اینحالت، در نقطه‌های تقسیم، باشروع از نقطهٔ صفر، مقدار شیب به قراری است که درجدول آورده‌ایم:

x	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	۱	$۱\frac{۱}{۴}$	$۱\frac{۱}{۲}$	$۱\frac{۳}{۴}$	۲	$۲\frac{۱}{۴}$	$۲\frac{۱}{۲}$	$۲\frac{۳}{۴}$
y	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۴}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۶}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	$\frac{۸}{۲}$	$\frac{۹}{۲}$	$\frac{۱۰}{۲}$	$\frac{۱۱}{۲}$

هربار که بـه‌اندازهٔ $\frac{۱}{۴}$ واحدبه‌طرف راست‌برویم، باید به‌اندازهٔیکچهارم مقدار شیب به طرف بالا حرکت کنیم، زیرا، اگر در طول راه آهن بـه انـدازهٔ $\frac{۱}{۴}$ راه را روی خط افقی حرکت‌کنیم، سطح خط آهن بـه‌اندازهٔ$\frac{۱}{۴}$

ارتفاع آن (در پایان خط)، بالامی‌رود. ازجمع این یکچهارمها ، مقدار y در نقطهٔ x=۳ بدست می‌آید:

$$y=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۲}+$$

$$+\frac{۱}{۴}\times\frac{۶}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۷}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۸}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۹}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۰}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۱}{۲}$$

از جملهٔ $۰\times\frac{۱}{۴}$، که برابر ۰ است، صرفنظرکرده‌ایم. همهٔ جمله‌ها در $\frac{۱}{۴}$ ضرب شده‌اند؛ علاوه بر آن، در عاملهای دوم‌هم،همه جا، مخرج ۲وجود دارد. بنابراین، y را می‌توان چنین نوشت

$$y=(۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱)\times\frac{۱}{۸}$$

با این تعداد جمله‌های زیادی‌که در اینجا داریم، به راستی روش «۱» ، قابل سپاسگزاری است. بایـد ۱۱ برابر جملهٔ وسط، یعنی ۶، را محاسبه کنیم. ۶۶ بدست می‌آید. این عدد را باید به ۸ تقسیم کرد کـه می‌شود $\frac{۶۶}{۸}$. به این ترتیب:

$$y=\frac{۶۶}{۸}=\frac{۷۲}{۸}-\frac{۶}{۸}=۹-\frac{۶}{۸}=۹-\frac{۳}{۴}$$

این مقدار تقریبی، تنها به‌اندازهٔ $\frac{۳}{۴}$ بـا ۹ اختلاف دارد (در حالت قبل، این اختلاف$\frac{۳}{۲}$ بود). ما، این نتیجه را بدون رسم‌شکل بدست‌آوردیم؛ با همین روش ،وبدون رسم شکل، می‌تـوانیم کارخود را ادامه دهیم. گام بعدی را باید با تقسیم فـاصلهٔ ۰ تـا ۳ روی محور x، بـه قسمتهای یك

هشتم، برداریم. در اینحالت، مقدار شیب درنقطه‌های تقسیم، به تدریج

وبه اندازهٔ $۲x = ۲ \times \frac{۱}{۸} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$

واحد، اضافه می‌شود. بنابراین، شیبها به ترتیب، در ایـن نقطه‌ها برابر است با

$$۰, \quad \frac{۱}{۴}, \quad \frac{۲}{۴}, \quad \frac{۳}{۴}, \quad \frac{۴}{۴}, \quad \frac{۵}{۴}, \ldots$$

این عددها را باید در طول هرگام، یعنی $\frac{۱}{۸}$، ضرب، وسپس باهم جمع کرد تا مقدار متناظر عرض درنقطهٔ $x = ۳$ بدست آید. این نتیجه پیدامی‌شود:

$$y = ۹ - \frac{۳}{۸}$$

روشن است که‌این روش را می‌توان تاهرجا که بخواهیم، ادامـه داد. ولی دنبالهٔ

$$۳, \quad \frac{۳}{۲}, \quad \frac{۳}{۴}, \quad \frac{۳}{۸}, \ldots$$

به سمت صفر میل می‌کند (اگـر بخواهیم سه کیك را بین مهمانان خود تقسیم کنیم، هرچه تعداد مهمانها زیادتر باشد، سهم آنها کمترمی‌شودو اگر تعداد مهمانهاخیلی زیاد شود، سهم هرکدام خیلی کم خواهد شد). بنابراین، ۹ همان عددی است کـه عرض منحنی کاملاً صاف شدهٔ ما در نقطهٔ به طول $x = ۳$، به سمت آن میل می‌کند. ولی $۳^۲ = ۹$ ،یعنی‌برابر است با مقدار تابع $y = x^۲$ در نقطهٔ $x = ۳$. به همین ترتیب، می‌تـوان

ثابت کرد که عرض منحنی ما در نقطهٔ $x=1$، به‌سمت $1^2=1$، در نقطهٔ $x=2$ به‌سمت $2^2=4$ ، درنقطهٔ $x=4$ به‌سمت $4^2=16$ و به‌طور کلی در هر نقطهٔ دلخواه به سمت مجذور طول این نقطه، یعنی بـه‌سمت x^2، میل می‌کند. و از اینجا نتیجه می‌شود که منحنی ما، وقتی که بندهای شکستهٔ آن صاف شود، به سمت سهمی $y=x^2$ میل می‌کند.

این موضوع را، به زبان تابع منطم می‌کنیم: اگر تنها یك‌مقدار تابع معلوم باشد، از روی تابع $2x$ می‌توان تابعی را پیدا کرد کـه تابع مفروض ما، مشتق آن باشد.

ودرعین حال، روش کاملاً دقیق این‌جستجورا هم بدست‌آوردیم. باید محور x را، از نقطهٔ مفروض تا نقطهٔ مورد بررسی (درمثال‌ما، از ٥ تا ۳) بـه پاره خطهایی تقسیم کـرد، طولهای پـاره‌خطها را در مقادیـر تابعی که متناظر با این تقسیم است، ضرب کـرد وایـن حاصلضربها را با هم جمع کرد. به این ترتیب، به‌اصطلاح مجموع تقریبی بدست‌می‌آید. وقتی‌که مرتباً شبکهٔ فاصله‌ها را تنگتر بگیریم،مجموعهای‌تقریبی، به سمت مقدار انتگرال، درنقطهٔ مورد بررسی، میل‌می‌کنند.

اعتراف می‌کنم که برای این‌کار، صرف نیروی‌زیادی‌لازم‌است، ولی در واقـع، بـرای انجام هـر عمل عکسی، کار بیشتر وسنگین‌تـری مورد نیاز است.

پیدا کردن مساحت

مجموعها تقریبی را می‌توان به تعبیری به‌عنوان مساحت درنظر گرفت. هرجمله از مجموع تقریبی، برابر است با حاصلضرب طول‌پاره

خط در مقدار تابع مفروض. ولی ما می‌دانیم که حاصلضرب را می‌توان به صورت مساحت مستطیلی نشان داد که دوضلع مجاور آن، همان دو عامل ضرب باشد. به این‌ترتیب، هرجملهٔ دلخواه از مجموع تقریبی را می‌توان به‌عنوان مساحت مستطیل متناظرآن، وتمام مجموع را، به‌عنوان مجموع مساحتهای این مستطیلها، در نظر گرفت.

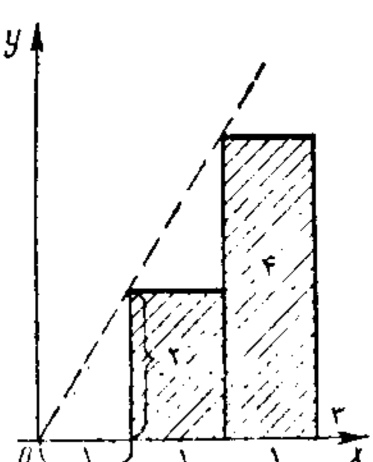
دربارهٔ این موضوع، مفصل‌ترصحبت می‌کنیم. نخستین مجموعی که‌بدست آوردیم، چنین بود:

$$۰+۲+۴$$

در اینجا،ضربها، به‌روشنی دیده نمی‌شود؛ ولی،درهرجمله، پاره‌خطی‌به طول واحد، به‌عنوان عامل ضرب، وجود دارد. بنابراین، این مجموع را می‌توان چنین نوشت:

$$۱\times۰+۱\times۲+۱\times۴$$

حالا، می‌توان مستطیلها را رسم کرد:



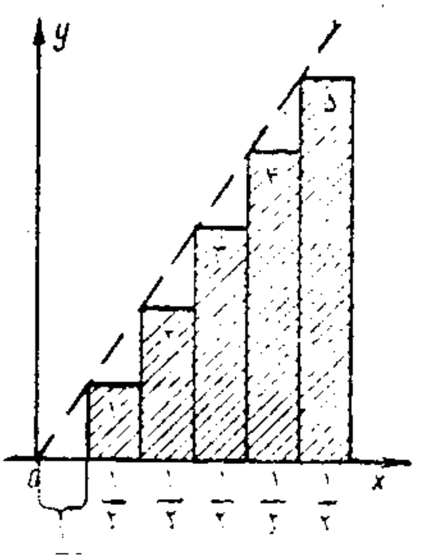
(۰ × ۱ را می‌توان به‌عنوان مستطیلی درنظر گرفت که قاعدهٔآن برابر

واحد ـ پاره‌خط از ۰ تا ۱ـ وارتفاع آن برابر ۰ باشد؛ روشن است که چنین مستطیلی، همان پاره خط افقی است).

مجموع تقریبی دوم ما، به این صورت بود:

$$\frac{۱}{۲}\times ۰+\frac{۱}{۲}\times ۱+\frac{۱}{۲}\times ۲+\frac{۱}{۲}\times ۳+\frac{۱}{۲}\times ۴+\frac{۱}{۲}\times ۵$$

که شکل متناظر باآن، چنین است:



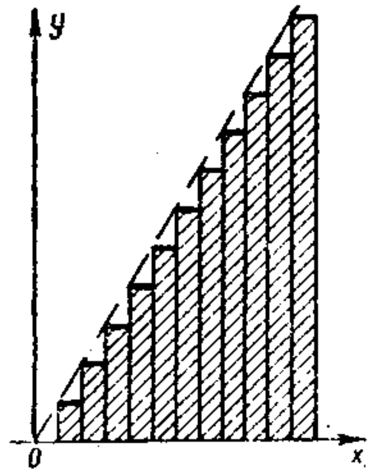
مجموع تقریبی سوم، از ۱۲ جمله تشکیل شده‌است:

$$\frac{۱}{۴}\times ۰+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۶}{۲}+$$

$$+\frac{۱}{۴}\times\frac{۷}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۸}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۹}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۰}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۱}{۲}$$

در اینجا باید واحد را یکبار دیگر نصف کرد. برای ما مشکل است که عددها را روی شکل نشان دهیم، ولی، طرح مستطیلها را می‌توان به‌این

ترتیب مشخص کرد:



دیده می‌شود که مساحت این شکل پله‌کانی، مرتباً بـه مساحت مثلث‌قائم‌الزاویه نزدیکتر می‌شود. منظورمن مثلثی است که در زیرخط راست نقطه چین قرار گرفته است. در همهٔ شکلها، این خطراست تغییر نمی‌کند. تنها با دیدن شکل اول، می‌توانیم بلافاصله بگوئیم کـه شیب خط راست برابر است‌با

$$۲:۱$$

وبه سادگی می‌توان ثابت‌کرد که‌شیب خطهای راستی هم که در دوشکل بعدی وجود دارد، به‌همان‌اندازه است. به‌همین مناسبت از خواننده‌می‌ـ خواهم که به نوبهٔ خود این خط راست را به یاد بیاورد: خط راست بـا شیب ۲:۱، که از نقطهٔ صفر می‌گذرد، با این معادله بیان می‌شود:

$$y=۲x$$

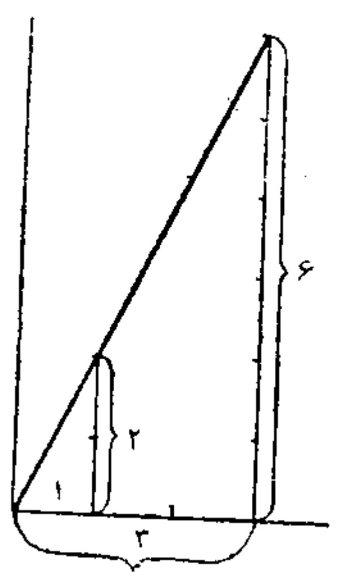
ولی، این همان تابع آشنای ماست! یعنی، این خط راست، «تصویر»تابع مفروض ماست!

به این ترتیب، مجموع تقریبی‌ما، کم‌کم بـه سمت مساحت زیـر «تصویر» تابع مفروض، میل‌می‌کند، وضمناً در هربار ، بـه این مساحت، بیشتر ودقیق‌تر نزدیك می‌شود.

تأسف می‌خوریم که اینراقبلاً نمی‌دانستیم ، چون می‌توانستیم ، بـه جای اینهمه زحمت، راه حل ساده‌تری بـرای محاسبهٔ مساحت مثلث قائم‌الزاویه در نظربگیریم! کافی بود دوضلع پهلوی زاویـهٔقائمه را در هم ضرب و بـعد حاصلضرب را نصف‌کنیم. ضلع افقی، برابر است بـا پاره‌خط از نقطهٔ صفر تانقطهٔ مورد بررسی ما $x=۳$، بنابراین، طول آن برابر با ۳ واحد است. ضلع قائم را هم می‌توان حساب کرد:

$$x=۳,\quad y=۲x=۲\times۳=۶$$

یعنی طول ضلع دوم پهلوی زاویهٔ قائمه برابر با ۶ واحد است.

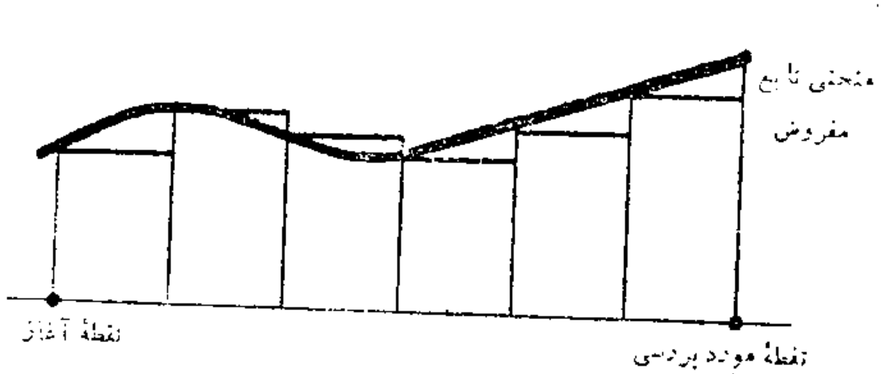


ودر نتیجه، مساحت مثلث چنین است:

$$\frac{۳\times۶}{۲}=\frac{۱۸}{۲}=۹$$

واین درواقـع همان نتیجه‌ای است کـه قبلاً، و از راه خسته‌کننده‌ای ، پیدا کردیم.

می‌بینیم که مساحت را می‌توان با محاسبهٔ انتگرالی بدست‌آورد. نتیجه‌ای که به آن رسیدیم، تصادفی نیست. تنها، اگر با تابعی که تن‌به هیچ قانونی نمی دهد (مثل تابع دیریکله، که بین مقادیـر ۰و۱، نـوسان می‌کندومجموعهای جزئی‌آن به‌سمت هیچ حدی میل نمی‌کند)، سروکار نداشته باشیم، یعنی تابعی «درست وبه‌نظم در آمده» مـورد نظرماباشد، همیشه می‌توان مجموعهای تقریبی را، به صورت یـك شکل پلکانی در نظرگرفت:



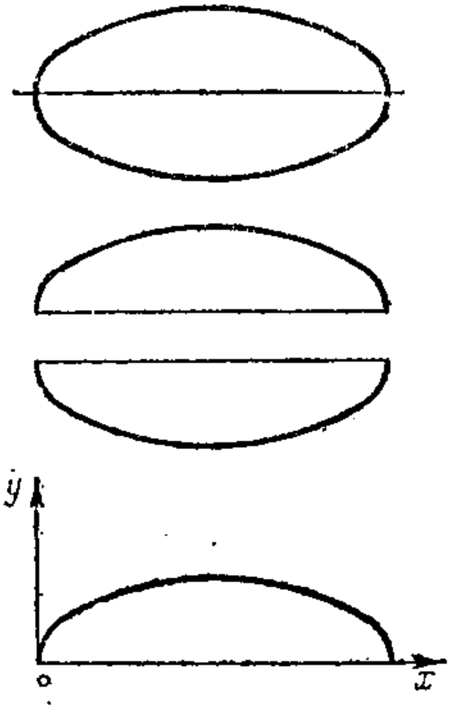
حالا اگر،فاصله‌های تقسیم را، به‌طور نامحدود، کوچك وکوچکتر کنیم، این مجموع، مرتباً به مساحت زیر منحنی تابع مفروض ، از نقطهٔ آغاز تانقطهٔ مورد بررسی،نزدیك‌ونزدیکترمی‌شود.مساحت زیرمنحنی‌ومساحتی که از راه این حد بدست می‌آید (یعنی انتگرال)، تنها دوبیان مختلف، از یك چیزند. به این ترتیب است که محاسبهٔ مساحت، بستگی کاملی‌به

محاسبه‌های انتگرالی دارد.

ما می‌توانیم‌مساحت مثلث‌قائم‌الزاویه را بدست آوریم ومی‌دانیم که هرمثلث دیگر را هم‌می‌توان به مثلثهای قائم‌الزاویه، وهرچندضلعی را به مثلثها، تبدیل کرد. به این ترتیب،پیداکردن مساحت‌شکلی که به پاره خطهای راست محدود شده باشد، هیچگونه اشکالی بـه وجود نمی‌آورد.

به اینهم خوگرفته‌ایم که مساحت دایره را می‌توان به‌کمك چند ضلعیهایی که دردایره محاط شده‌اند، پیدا کرد. ولی، مساحت شکلهایی راکه به وسیلهٔ خطهای منحنی محدودشده‌اند، چگونه باید بدست‌آورد؟

وقتی‌که بایك شکل منحنی الخط سروکار داریم، می‌توانیم‌آنرابا خطهای راست به قسمتهایی تقسیم‌کنیم،که بعداً بتوان هرکدام از آنها را، روی لبهٔ مستقیم‌آنها، بر محور x قرار داد:



مساحت هرقسمت را به طور جدا گانه پیدا می‌کنیم. ولی ، پیدا کردن مساحتی که زیر منحنی قرارگرفته باشد، چیزی جزهمان محاسبهٔ انتگرالی نیست. ممکن است به انتگرالی برخورد کنیم که بتوان به سادگی آنرا محاسبه‌کرد ودرنتیجه، بدون هیچ زحمتی مقدار مساحت‌را بدست‌آورد.

مثلاً، می‌دانیم که‌انتگرال تابع $x^۲$ برابر است با

$$y = \frac{x^۳}{۳}$$

به‌عبارت دقیقتر، ازبین مجموعهٔ‌انتگرالهای تابع $x^۲$،این تابع عبارتست از انتگرالی‌که ازنقطهٔ صفر می‌گذرد، زیرابرای $x=۰$داریم: $\frac{x^۳}{۳} = ۰$

با توجه به این آگاهی، می‌توانیم بلافاصله مساحت زیر سهمی بامعادلهٔ

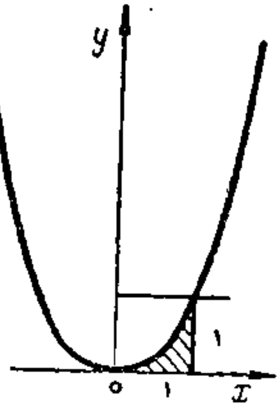
$$y = x^۲$$

را محاسبه کنیم. مساحت زیر این منحنی،از نقطهٔ صفر تا نقطهٔ $x=۱$، دقیقاً برابر است با مقدار انتگرال به ازای $x=۱$، یعنی

$$\frac{۱^۳}{۳} = \frac{۱}{۳} \quad \text{(واحد مربع)}$$

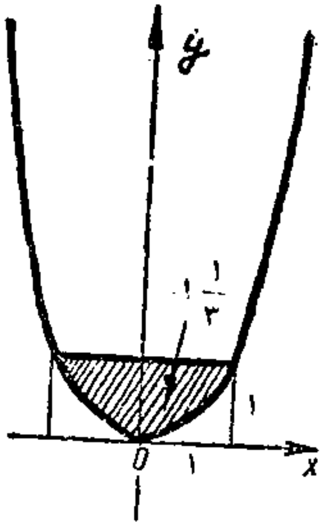
به‌این‌ترتیب، مساحتی‌که درشکل‌صفحهٔ‌بعدهاشورزده‌ایم، وقسمتی ازمربع به ضلع واحد است، دقیقاً برابر است با یك سوم مساحت این مربع.

ولی، آیاکسی پیدا می‌شود که به محاسبهٔ مساحتی که در خارج سهمی قرار دارد، علاقمند باشد؟



ممکن‌است درلحظهٔ نخست به‌نظر برسد که به‌نتیجهٔ‌جالبی‌نرسیده‌ایم. ولی ، باتوسل بـه همین‌نتیجه، می‌توان راهـی بـرای محاسبهٔ مساحت بین بازوهای سهمی پیداکـرد. ودر ایـن مورد، تا هرارتفاعی می‌تـوان پیش رفت.

چون‌یك سوم مربع واحد دربیرون‌سهمی قرار دارد ، بقیهٔ دوسوم آن، در داخل سهمی خواهد بود. و اگر قسمتی را که‌قرینهٔ این قسمت، درداخل سهمی است، به حساب‌آوریم، مقدار مساحت شکلی‌که درابنجا هاشورزده‌ایم، بدست می‌آید:



$$2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$ (واحد مربع)

می‌خواهم دوباره به‌مجموعهٔ مستطیلهای کوچکی که به مساحت‌ما نزدیك می‌شوند، برگردم:



وقتی که‌نقطه‌های تقسیم را، مرتباً به هم نزدیکتر کنیم، مستطیلهای ما باریك و باریکتر می‌شود، ومساحت هر کدام از آنها، به طور جداگانه، به سمت صفر میل می‌کند (دوباره ، تقسیم‌کیك را به یادما می‌آوردکه مرتباً بین تعداد بیشتری از مهمانهاتقسیم شود). ولی، این نوارهایی که مساحت‌هرکدام‌ازآنهابه‌تنهایی‌به‌سمت‌صفرمیل‌می‌کند،رویهم‌مقدارتقریبی سطح معینی را، که مخالف صفر است، به ما می‌دهـد . دراینجا، تعداد مستطیلها، به همان نسبتی زیاد می‌شود که تعداد فاصله‌های تقسیم،کم می‌شود.

پشه چوپرشد، بزند پیل را . ازبه‌هم پیوستن‌نیروهای خردوکوچك، نیرویی بزرگ پدید می‌آید. با رویهم ریختن ذره‌های ناچیز شن ، هرمی بزرگ بدست می‌آید، باجمع شدن « مردمان کوچك» نیرویی دگرگـون کننده پیدا می‌شود. واین همه، از راه «انتگرال گرفتن» کارهای کوچك، بدست می‌آید.

۳

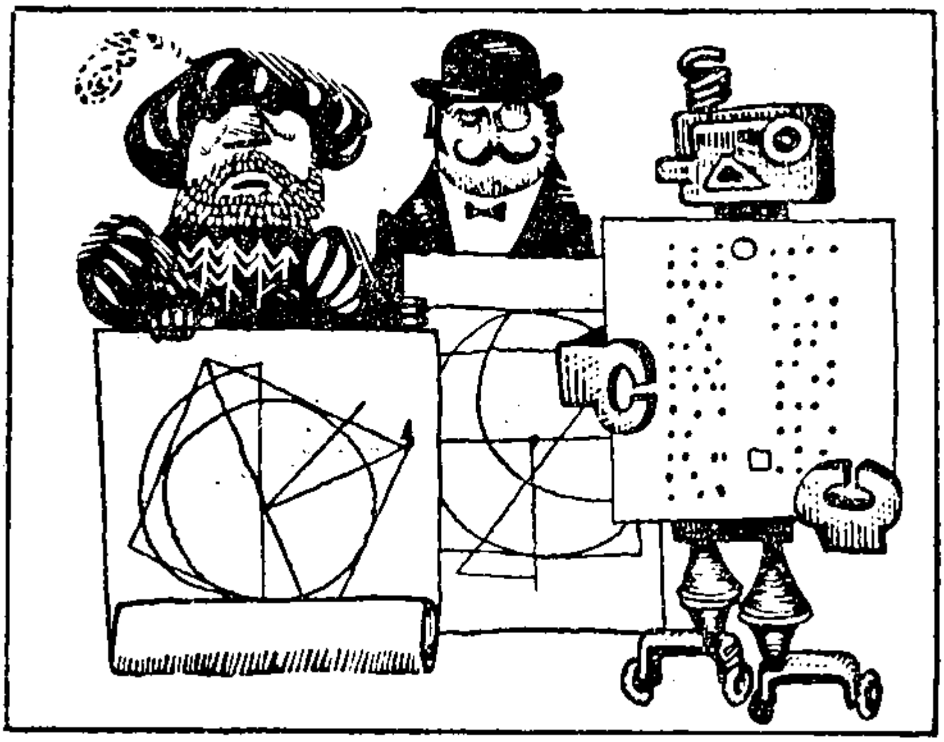
عقل خالص

از خود انتقاد می‌کند

۱۸. همه چیز در دنیای ریاضیات ممکن است...

تربیع دایره

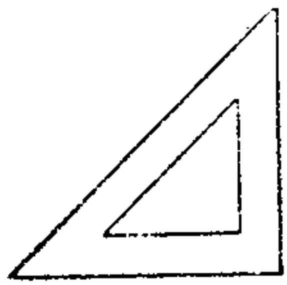
شاید، هرریاضیدان معروفی، این آرزو را کرده باشد که شخص ناشناس واسرارآمیزی به او مراجعه کند ودستنویس پرارزشی را نزد او به امانت بگذارد که در آن بالاخره راه عملی تربیع دایره را ذکر کرده باشد. این دو واژهٔ «تربیع دایره» که به احتمال زیاد خوانندهٔ ما بارها به آن برخورد کرده



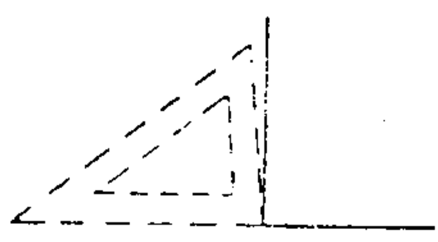
است، نیروی جاذبهٔ فوق‌العاده‌ای داشته‌است. بحث اصلی تربیع دایره، چیست؟

اگر کسی بگوید: «با دردست داشتن دوضلع پهلوی زاویهٔقائمه ازمثلث‌قائم‌الزاویه‌ای، می‌توانم مثلث را بسازم»، بلافاصله میل‌می‌کنیم بپرسیم: « برای اینکار، از چه ابزارهایی استفاده‌می‌کنی؟».

فرض می‌کنیم، طرف گفتگوی ما ، یك مثلث قائم‌الزاویهٔ فلزی یا چوبی، از آن نوع که در لوازم‌التحریر فروشیها وجود دارد، بردارد



و مداد را در امتداد ضلعهای پهلوی زاویهٔ قائمه آن بکشد. ولی، دقت اینگونه‌ابزارها معمولاً خیلی‌زیاد نیست. اگرگونیای‌چوبی رابرگردانیم ودرکنار زاویه‌ای که رسم کرده‌ایم ، بگذاریم، اغلب به چنین نتیجهٔ اسفباری می‌رسیم :

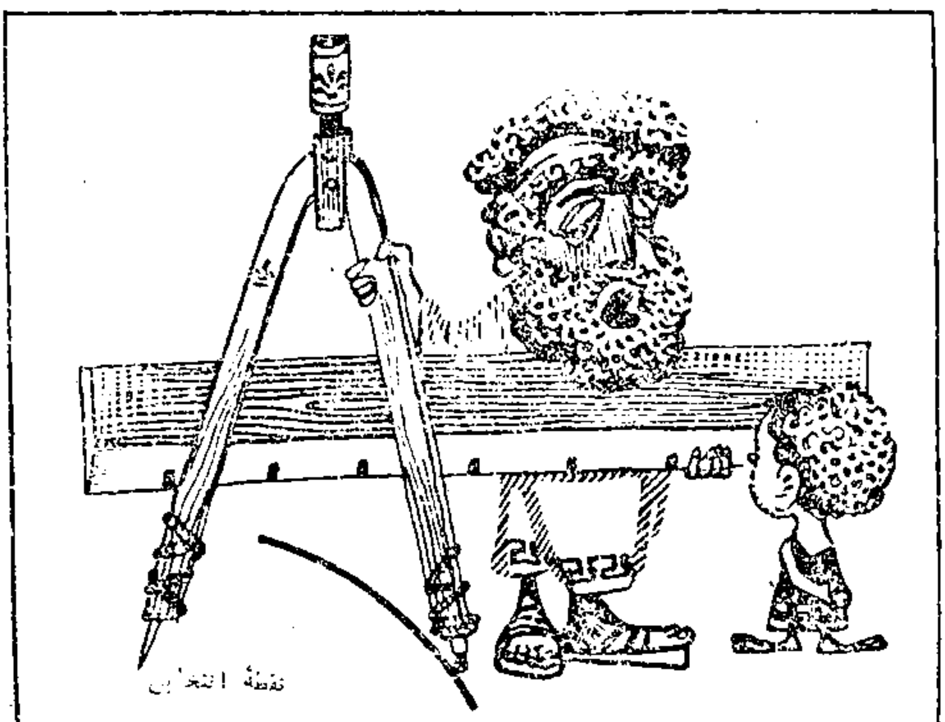


به این ترتیب، گونیای چوبی، یك قائمهٔ بدون عیب نیست.

حتی یونانیان باستان هم‌برای انجام ساختمانهای هندسی، بادقت

بسیار،مناسبترین ابزارها را انتخاب می‌کردند. خط‌کش راتنها می‌توان برای رسم خط راست به کاربرد (ونه برای رسم زاویهٔ قائمه).

باوجود این، در اینجا یك مصالحه وجود دارد: به ندرت‌موفق می‌شوند خط‌کشی‌درست کنندکه کنارهٔ آن خط راست واقعی باشد.دایره را می‌توان با وسیله‌ای رسم کرد که تا حد زیادی دقیقتر است؛ دراینجا لازم‌نیست،مدادرا دور دایرهٔ چوبی بچرخانیم، بلکه دایره به خودی‌خود به‌وسیلهٔ پرگار، رسم می‌شود. اگر بازوهای پرگار خیلی آزاد به هم وصل نشده باشد، واگر انتهای یکی از بازوها را درنقطهٔ مطمئنی،محکم نگاه داریم، انتهای بازوی دوم ، به فاصلهٔ ثابتی از نقطهٔ انتخابی باقی می‌ماند و دایرهٔ دقیقی را برای مارسم می‌کند:



یونانیهای باستان، برای رسم شکلهای هندسی، به جز خط‌کش و

پرگار، ازهیچ‌وسیلهٔ دیگری استفاده نمی‌کردند. ضمناً، اینراهم یادآوری کنیم که هرچه از پرگار بیشتر واز خط‌کش کمتر استفاده کنیم، شکلی را که رسم می‌کنیم ، قابل اعتمادتر خواهد بود. بعد از گذشت سده‌های زیاد، معلوم شد که خط‌کش را بـه طورکلی می‌توان حذف کـرد: هـر ساختمان هندسی را که بتوان‌به‌یاری خط کش‌و پرگار انجام‌داد،می‌توان تنها به‌کمك پرگار هم به انجام رساند. البته روشن است که بـا پرگار نمی‌توان خط راست رسم‌کرد؛ بنابراین، اگر ساختمان‌یك شکل‌هندسی، تنها بـه‌کمك پرگارانجام شود، مثلاً، مربع بـه وسیلهٔ چهار راس آن مشخص می‌شود:



در واقع، شکلی‌راکه به‌این ترتیب‌مشخص شده باشد،می‌توانیدبه سادگی پیش خود مجسم کنید.

باهمهٔ اینها، ما به‌خود اجازه می‌دهیم‌که ازخط‌کش‌وپرگار، هردو استفاده کنیم. طبیعی است که این پرسش پیش آید: کدام ساختمانهای هندسی را می‌توان، تنها با استفاده از این دووسیله انجام داد؟

تکلیف مسألهٔتربیع دایره هم، درگرو پاسخ‌به همین پرسش‌است: به‌ما دایره‌ای داده‌اند واز ما می‌خواهند، مربعی رسم کنیم کـه مساحت

آن برابر بامساحت این‌دایره باشد (یعنی، رسم‌مربعی‌هم ارز بادایرهٔ مفروض).

ما می‌دانیم که مساحت دایره را می‌توان بادقت معین کرد ؛ از راه شکل مستقیم الخطی که مرتباً بهتر و بهتربه دایره نزدیك شود. مثلاً، اگر دایره‌ای به‌شعاع واحد رسم کنیم، برای مقدار مساحت آن به عددگنگ کاملاً مشخصی می‌رسیم که بارقمهای ...۳/۱۴۰ آغازمی‌شود ورقمهای دهدهی آنر تاهرجا که بخواهیم، می‌توانیم ادامه دهیم. این عدد گنگ، آنچنان نقش مهمی درریاضیات‌دارد که حتی نام اختصاصی بران آن انتخاب کرده‌اند، نامی که شما از زمانی کـه روی نیمکتهای دبستانی می‌نشسته‌اید باآن‌آشناهستید، یعنی π.

ولی، همینکه مساحت دایرهٔ به شعاع واحد، برای ما معلوم‌باشد، بلافاصله می‌توانیم‌مربعی را باهمان مساحت نشان دهیم. برای محاسبهٔ مساحت هرمربع، باید طول ضلع آنرا مجذور کرد. عددی وجودداردکه مجذورآن برابر با π باشد، این عدد را می‌توان به‌صورت $\sqrt{\pi}$ نشان‌داد. بنابراین، جواب مسالهٔ ما عبارتست از مربعی به‌ضلع $\sqrt{\pi}$.

تا اینجا، مطلب درست است، ولی ما نمی‌خواستیم بدانیم‌که آیا چنین مربعی وجود دارد یا نـه ، ما می‌خواستیم ببینیم که آیا به‌کمك پرگار وخط‌کش، می‌توان این مربع را رسم‌کرد یا نه!

این حقیقت‌که $\sqrt{\pi}$ ، عددی است گنگ ، یعنی عددی است که به صورت کسردهدهی نامتناهی و غیر دوره‌ای نـوشته می‌شود، به خودی خود، دشواری بزرگی‌به وجود نمی‌آورد. مثلاً،مامی‌توانیم مربع‌به‌ضلع برابر $\sqrt{2}$ را رسم کنیم، و ما این مربع را ضمن حل‌مسالهٔ مربوط به دو برابرکردن مساحت حوض، قبلاً بدست آورده‌ایم.

آیا نمی‌شود $\sqrt{\pi}$ را هم به ترتیبی، به کمك پرگار وخط‌کش رسم کرد؟

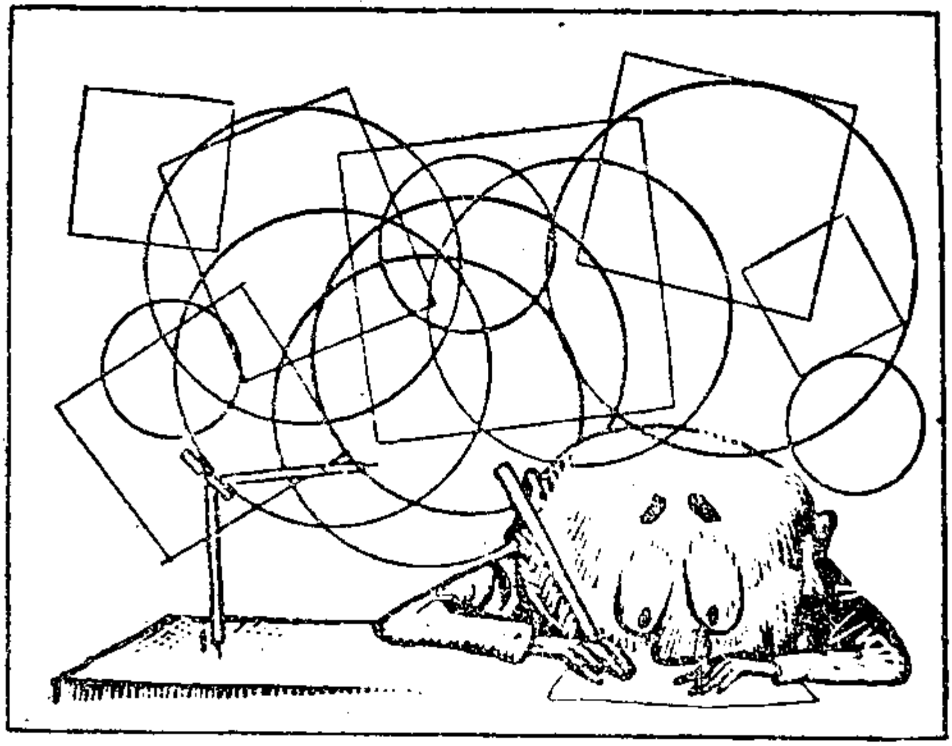
علاقمندانی که‌درجریان صدهاسال درجستجوی‌چنین‌راه‌حلی‌بودند، به‌هیچ نتیجه‌ای نرسیدند. راه‌حل اصلی مساله، تنها زمانی پیدا شد که توانستند، مساله‌های هندسی را به‌زبان جبری بیان‌کنند.

چه شکلهایی را می‌توان به یاری پرگاروخط‌کش رسم‌کرد؟ خط راست ودایره. ولی ما می‌دانیم که در زبان جبری، خطراست را بامعادلهٔ درجهٔ اول و دایره را با معادلهٔ درجهٔ دوم بیان می‌کنند . بنابراین، همهٔ ساختمانهای هندسی، که‌به‌کمك پرگار وخط‌کش قابل اجرا هستند، متناظر باحل چنین معادله‌هایی می‌شوند.

از طرف دیگر، توانسته‌اند ثابت‌کنندکه عدد $\sqrt{\pi}$ ، وهمچنین‌عدد π ، نمی‌تواند ضمن حل چنین معادله‌هایی بدست آید. اصولاً، این عدد π نمی‌تواند جواب هیچ معادله‌ای‌باشد، ولواینکه معادله را ازدرجه‌های دیگری بگیریم، مگراینکه خود عدد π را به نحوی درضریبهای معادله داخل کنیم (مثلاً، در معادلهٔ $x-\pi=0$، بدست می‌آید: $x=\pi$). به‌ به همین مناسبت، می‌گویند که π عددی جبری نیست؛ چنین عددهایی، غیرجبری یا متعالی (ترانساندانت) نامیده‌می‌شوند.

حالا ، دیگر هیچ تردیدی نداریم که تربیع دایره ممکن نیست. به این ترتیب، یکباردیگر، ریاضیدانان توانستند عدم امکان حل یك‌مسالهٔ مشخص را به‌کمك ابزارهای معین، ثابت کنند.

درکنار کشفی‌که وجود عددهای غیر جبری ،یعنی عددهایی راکه نمی‌توانندجوابی از یك‌معادلهٔ‌جبری باشند، نشان می‌دهد(می‌توان‌ثابت‌کرد



که‌عدد...۲/۷۱ = e مبنای‌لگاریتم‌طبیعی، هم یك عدد غیرجبری است، علاوه‌بر آن، می‌توان‌ثابت کرد که‌عددهای‌غیرجبری، اکثریت‌عددهای گنگ‌را تشکیل‌می‌دهند)، من‌می‌خواهم‌روی‌جنبهٔ‌دیگری‌ازاستدلالی که‌هم‌اکنون‌دادیم تکیه‌کنم، جنبهٔ مربوط به‌اصالت و درستی روش‌کار که‌یونانیهای‌باستان، اهمیت زیادی به آن می‌دادند. ما،اصلاً به این پرسش نپرداختیم که‌آیا به طورکلی می‌توان وسیله‌ای پیدا کرد که به‌کمك آن بتوان مربعی‌ساخت که مساحت آن برابر با مساحت دایرهٔ مفروض باشد(وقت آنست کـه بگوییم، در پایان سدهٔ گذشته وسیله‌ای ساخته شد که‌می‌تواند بـا عمل کاملاً مکانیکی، چنین مربعی را «آماده‌کند»)؛ ما تنها پاسخ یك پرسش کاملاً مشخص را دادیم: آیا می‌توان چنین ساختماتی را به کمك پرگار وخط‌کش انجام داد.

وقتی که مساله به‌اینصورت تنظیم شده باشد، برای هرریاضیدانی، برای همیشه یك مسالۀحل شده است-منتهی به‌صورت منفی-و تنها کسانی آنرا باورنمی کنند که عقل درستی ندارندو افسون «تربیع دایره» باز هم اعصاب آنها را تحریك وخود آنها را به تحقیق وادار می کند.

به خاطر همین اصالت روش کار وتنظیم روش شرطهاست که‌در میان ریاضیدانان،از آن نـوع سوء تفاهمهائی که در جمع سخنگویـان دانشهای دیگر وجود دارد، پیدانمی‌شود. ریاضیدانان همۀ زمانها و همۀ کشورها، همیشه باهم‌تفاهم کامل دارند. مشهور شده است که‌آنها،زبانی «نامفهوم»و «ساختگی»دارند، درحالیکه احتمالاً، حتی یکنفرهم درمیان دیگرمردمان پیدانشودکه پیام خود را، مثل یك ریاضیدان، اینطوردقیق وحساب شده، بیان کند. روشن است کـه در مـوضوع مـورد بـررسی ریاضیات‌هم، سهمی‌ازذهنی‌بودن وجود دارد، همچنانکه درهمۀرشته‌های دانش، چنین است. مثلاً، نقطه وخط، درتصورافرادمختلف، ممکن‌است به‌صورتهای‌مختلفی جلوه کند. یکی ازمعلمهای من،نخستین‌درس‌خودش را از اینجاآغازکرد که به طور غیر منتظره‌ای از شاگردان پرسید:

- شما هرگز نقطه را دیده‌اید؟

- نه!

- هیچوقت نقطه را رسم کرده‌اید؟

- بله، یعنی - دوست همکلاس من حرف خودرا تصحیح کـرد - من چنین قصدی داشته‌ام، ولی، البته به طور کامل موفق نشده‌ام.

(من گمان‌می کنم که به‌خصوص به‌خاطر همین پاسخ بود که کلاس ما، همیشه مورد توجه معلم بود). وقتی که‌روی‌شکل،ذرۀ کوچکی‌ازمغز

مداد یاگچ را می‌گذاریم ، چیزی که به یاری ذره‌بین به صورت تپه‌ای کوچك دیده می‌شود، روشن است که نمی‌تواند یك نقطه باشد . هرکسی پیش‌خود تصوری از نقطه داردو با توجه‌به‌همین تصور است که‌می‌کوشد آنرا به نحوی رسم کند.

تصورخط راست‌می‌تواند بازهم ذهنی‌ترباشد.خط راست به‌هیچوجه ساده‌ترین خطها نیست: بچه‌های کوچك وآدمهای نخستین ؛ خط راست رسم نمی‌کنند ، نزدیکترین خط به ذهن آنها، به‌شکل یك کمان خم شده است.برای کشیدن خط راست ، ذهنی لازم است که تا حد بسیار زیادی تربیت شده وبه نظم در آمده باشد.

باتوجه به تصورهای‌گوناگونی‌که دربارهٔ موضوع مورد بررسی ریاضیات وجوددارد، وقتی که‌یك ریاضیدان می‌خواهد اطلاع بدهد کـه چیزی را دربارهٔ نقطه‌ها وخطهای راست ثابت کرده است، مطلب خودرا به این ترتیب مطرح می‌کند:

«من نمی‌دانم که تو شکلهای هندسی را چگونه پیش خود تصور می‌کنی. بنابرتصور من دربارهٔآنها، از هر دونقطه می‌توان یك‌خطراست عبور داد. آیا این، باتصور تو مطابقت دارد؟»

اگر در بـرابـر این پرسش، پـاسخ مثبتی بشنود، وتنها در چنین حالتی، به خود حق می‌دهد دنبال صحبت خود را بگیرد:

«من چیزی را ثابت کرده‌ام ودر رونـد استدلال،از هیچ خاصیت دیگرنقطه‌وخط راست،جزآنچه‌که توبامن موافقت‌کردی، استفاده‌نکرده‌ام. بنابراین‌توحرف مرا می‌فهمی، ولواینکه دربارهٔ تصورهای دیگری که از نقطه وخط راست دارم، بامن موافق‌نباشی».

ریاضیات، ادعای‌عرضه‌کردن حقایق‌مطلق راندارد. پیام‌ریاضیات همیشه خیلی ساده واز این نوع است: «اگر... آنگاه...». اگر تنها از پرگاروخط‌کش استفاده‌کنیم،آنگاه تربیع دایره ممکن نیست. اگر تصور ما از نقطه وخط راست چنین باشد، آنگاه فلان حکم دربارهٔ آنها درست است.

در واقع ، مدرسه با چنین پیامی ریاضیات را به ما نمی‌آموزد؛ ما هم، در قسمتهای قبلی این کتاب ، با چنین موضوعهایی برخورد نکرده‌ایم. وقتی که‌کسی، اطلاعی به دیگری می‌دهد، همیشه بهتر است که نتیجه را، نه به‌صورت تمام شدهٔ آن، بلکه بانشان دادن روندی که منجر به شکل گرفتن آن شده است، مطرح کند. ولی، درتب وتاب این شکل گرفتن شرطهای جدی ودقیقی که لازم است، به طور کامل روشن نمی‌شود. باوجود این، اغلب بـه دنبال هرپیشرفت جـدی، دوران انتقاد فرا می‌رسد.

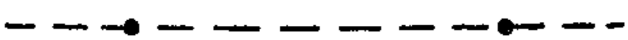
ریاضیات، به‌گذشته‌ای که داشته است می‌نـگردو محتوی اصلی نتیجه‌هایی‌راکه‌بدست‌آورده است، از پوسته‌های زیادی آن،پاك می‌کند.

دستگاه اصلهای اقلیدس

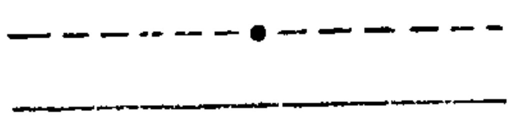
نخستین مدافع بزرگ منظم‌کردن ریاضیات، اقلیدس بود. رسالهٔ هندسی او، در جریان سده‌های بسیار، نمونه بودن خود را حفظ‌کرد.

اقلیدس، درآغاز نوشته‌اش، مفهومهای بنیانی راتعریف می‌کند وشرطهای اساسی را که برای ایـن مفهومها لازم است، مشخص می‌کند (او، این شرطها را، آکسیوم ـ اصل موضوع ـ می‌نـامید). استدلالهای بعدی مربوط به اینست‌که چگونه با تصورهایی که از نقطه، خط راست

وصفحه داریم، می‌توانیم اصل موضوعهای اقلیدس را، به‌عنوان‌حقایقی، بپذیریم. به‌این‌ترتیب، اقلیدس، اصل موضوعها راهم،بادقت بسیارزیادی انتخاب کرده است. ما در اینجا، با چنان پیامهایی سروکار داریم که با دید همهٔ مردم تطبیق می‌کند؛ مثلاً، بین اصل موضوعها ، ایـن حکم وجوددارد که از دو نقطهٔ داده شده، می‌توان یك خط راست، وتنها یك خط راست، گذراند:



از همان روزهای تالیف کتاب اقلیدس،ودر جریان دوهزارسال، تنها بر سر یکی از اصل موضوعها بحث در گرفت؛ وایـن همان اصل موضوع مربوط به‌توازی است: اگرخط راستی داده شده باشد، از نقطهٔ مفروضی که روی خط راست قرار ندارد، می‌توان یك خط راست، وتنها یك خط راست، رسم کرد، به نحوی که تا هر جا دو خط راست را ادامه دهیم ، به هم نرسند:



می‌گوییم این خط راست جدید، باخطداده شده،متوازی است.مادوباره، وبه همین زودی، به این موضوع برمی‌گردیم.

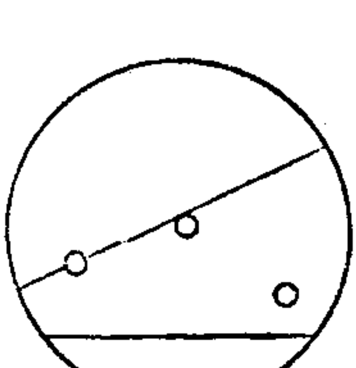
ابتدا باید به امکان دیگری، که‌مربوط به‌روش‌اصل‌موضوعی‌است توجه کنیم.

اگراستدلال دربارهٔ یك قضیه، چنان پیش برود که هرکس‌بتواند تصور خودش را دربارهٔ نقطه، خط راست وصفحه درآن ببیند(تنهابااین قید که این تصورها باید با شرطهای مربوط به اصل موضوعها، سازگار

باشد)، دراینصورت دیگر این موضوع اهمیت ندارد که بـه طور کلی، چیزهایی که دربارهٔ آنها صحبت می‌کنیم، وجود دارند یانه، و اصولاً مفهوم واقعی نقطه،خط راست وصفحه چیست! ممکن است که این شرطها- اصل موضوعها- برای موضوعهای دیگری هم صادق باشند،دراینصورت، همین استدلالها، می‌تواند منجر به حکمی دربارهٔ این موضوعهای جدید هم بشود. دراین حالت، ما «بایك حکم، به‌دوحکم می‌رسیم»،

ما، پیش از اینهم، وقتی که از قانون رابطهٔ متقابل صحبت می‌کردیم، به این موضوع برخوردکردیم، درآنجا، شخص می‌توانست حتی این تخیل زیبا را بپذیردکه نقطه را به عنوان خط راست، وخط راست را به عنوان نقطه، درنظربگیرد (خواننده، مثالی را که در آنجا داده‌بودیم به‌یاد می‌آورد که: سه‌نقطه، وقتی یك مثلث تشکیل می‌دهند که بر یك خط راست واقع نباشند ؛ سه خط راست ، یك مثلث را تعریف می‌کنند، وقتی که از یك نقطه عبور نکنند).

مثلاً فرض کنید، کسی باشد که وقتی در بـارهٔ نقطه‌ها صحبت می‌کند ، تنها نقطه‌هایی را در نظر بگیرد که در داخل یك دایرهٔ بـاشند (ضمناً نقطه‌های واقع برمحیط دایره را هم به‌حساب نیاورد) وبه عنوان



خط راست هم، تنها پاره خطهایی را در نظر بگیرد که در داخل این‌دایره قرار گرفته باشد.

در این دنیای محدود، این‌پیام درست است: «ازدونقطه (یعنی‌ازدو نقطهٔ واقع درداخل دایره)، می‌توان یك‌وتنها یك خط راست (یعنی‌قسمتی از خط راست‌که به محیط دایره محدود شده است)، گذراند» . بنابراین، در اینجا هم، همهٔ حکمهایی‌که به نقطه‌و خط راست مربوط می‌شوند و می‌توانند، تنهابراساس همین یك اصل موضوع‌ثابت شوند، درست‌است.

هندسهٔ هذلولی

حالا، به اصل موضوع توازی برمی‌گردیم. شگفت‌آور نیست که وقتی آدمی به این موضوع می‌اندیشد، و حتی خوانندهٔ این‌کتاب،خیلی زود به‌این نتیجه برسدکه ازنقطهٔ واقع درخارج یك خط راست، می‌توان تنها یك خط راست، موازی با خط داده شده، رسم‌کرد. ودر ایـن میان، خواننده اصلاً گمان نمی‌کند که ممکن است به این خاطر، مشکلی پیش آید. دنیای تصوری بیشتر مردم اینطورگواهی می‌دهد که اصل موضوع توازی، هیچ نیازی به بحث ومجادله ندارد.

باوجود این، وقتی که من ریاضیات را به بچه‌های ده‌ساله یادمی دادم، باحقیقت زیر مواجه شدم:

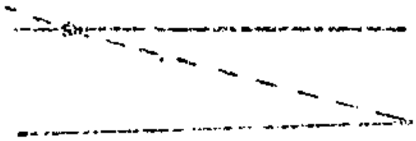
هرکدام از دانش‌آموزان مربعی در دست‌گرفته بودند ومی‌بایستی بگویندکه چه خاصیتهایی دربارهٔ ضلعهای مربع، به چشمشان می‌خورد خیلی زود؛ واژهٔ «موازی»درکلاس طنین انداخت؛ برای بچه‌ها، مفهوم این واژه، روشن بود. من پرسیدم ، وقتی در بارهٔ توازی خطها صحبت

می‌کنیم، چه چیزی به نظرشان می‌آید. یکی از بچه‌ها گفت: خطهای موازی، امتدادهای یکسان دارند. دیگری‌گفت: دو خط موازی، به‌فاصلهٔ ثابتی ازیکدیگر قرار دارند. سومی‌گفت: دوخط موازی را، هرقدرادامه دهیم، به هم نمی‌رسند. من‌گفتم: «همهٔ اینها درست است، هرکدام ازاین خاصیتها را می‌توان به‌عنوان‌نشانهٔ‌توازی درنظرگرفت وبعد، دوخاصیت دیگر را، از آن نتیجه گرفت». در این موقع، آنیا ، بهترین شاگردمن، که همیشه وبه موقع‌نکته‌های باریکی را مطرح می‌کرد، از نیمکت‌جلو کلاس بلند شدوگفت وبرای دوخط موازی، این نشانه خوب نیست که بگوییم آنها، به‌یکدیگر برنمی خورند، زیرا می‌توان دوخط راست پیش خود درنظرگرفت،که به فاصلهٔ ثابتی از هم نباشند ودر عین‌حال هرچقدر که‌آنها را ادامه دهیم، هرگز به هم نرسند»وآنوقت، روی شکل،دوخطی را که پیش خود تصور کرده بود، به من نشان داد:



من باورکردم،که ذهن‌الهامی او، چنین امکان‌تصوری را به اوداده‌است.

روشن است که این مساله را نمی‌شود با تکیه برتجربه، بررسی کرد. اگر «موازی» ما، شیبی به این ترتیب داشته باشد:



با ادامه دادن هر دوخط راست، می‌توانم متوجه شوم که آنها به هم برخورد می‌کنند. ولی، فرض کنیم که شیب خط راست بسیار کم‌باشدو ما، زاویهٔ شیب را به یکدهم، یکصدم، یکهزارم،... خود، تبدیل‌کنیم.

ازکجا می‌شود دانست‌که وقتی این دنبالهٔ شیبها را ادامه دهیم، به‌جائی نرسیم که‌خط راست‌ما، خط راست زیرین را قطع‌نکند؟کسرهای نامتناهی را هرگز نمی‌توان به‌آخر رسانید.

ما به‌نمونهٔ منحنی برخورد کرده بودیم که بـه یك خط راست، دائماً نـزدیك می‌شد ، ولـی هرگز بـه آن نمی‌رسید ؛ هـرشاخه‌ای از هذلولی، همین خاصیت را دارد.

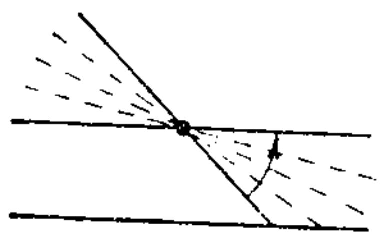
به این ترتیب، نباید دراین باره تعجب کرد کـه آدمهایی وجود داشته‌باشند کـه در مـورد خطهای راست هم، پیش خود چنین تصوری داشته باشند. تصورهای ما، از راه دنیای احساسهای ما، شکل می‌گیرد. من، مثلاً فکر می‌کنم، کسی که مدتها از فرد مورد عـلاقه‌اش جدا شده است، می‌تواندنقشهٔ نزدیکی بی‌پایان خود را با وجود مورد محبت‌خود، به تصور آورد، در حالیکه، باهمه اینهااز خود برخورد خبری نباشد.

هرطورکه فرض‌کنیم، به هرحال، از همان زمان اقلیدس،به‌تدریج کسانی پیدا شدند که نقطه نظر آنها، بانقطه‌نظر شاگردمن آنیا ، تطبیق می‌کرد. البته تردیدی نیست کـه این آدمها، خودشان هم بـه حقانیت خود اطمینان نـداشتند، دست کم، بـه این‌مناسبت کـه بـرخلاف اعتقاد اکثریت،فکر می‌کردند. ولی،آنها، با این ادعا که اصل موضوع‌توازی، ازلحاظ روشنی وسادگی، بادیگراصل موضوعها، تفاوتی ندارد،اعتراض می‌کردند: «اگر بتوان این اصل موضوع را ، تنها به‌کمك شرطهایی‌که مورد تردید مانیست، ثابت کرد، آنوقت ما آنرا می‌پذیریم».

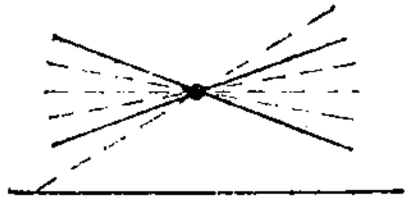
درطول صدهاسال،ریاضیدانان،بیهوده‌می‌کوشیدند تااصل‌موضوع توازی را ،باتکیه بردیگر اصل موضوعها ثابت‌کنند.

یاتوش بایای ، ریاضیدان مجار، یکی از نخستین کسانی‌بود که جرات کرد، بدون ترس، نقطه نظر مخالفی را بیان‌کند: «اصل موضوع توازی رانمی توان ثابت کرد، زیرا این اصل موضوع درست نیست.

من اینطور گمان می‌کنم: اگر از نقطه‌ای که درخاج خط راست مفروض‌قرارگرفته‌است، خط راست تازه‌ای‌بگذرانیم که‌خط‌راست‌مفروض را قطع کند، وآغاز به‌چرخاندن این خط راست تازه‌بکنیم، آنوقت خط راست نخست، با خط راست تازه ، در نقطه‌ای که مرتباً دور می‌شود، برخوردمی‌کند، تااینکه خطهای راست برای همیشه از هم‌جدا می‌شوند:



این‌خطراست «متباعد»، نسبت به‌خط راست بیحرکت، هنوز مقداری‌شیب دارد. اگرخط راست متحرك رابیشتر بچرخانیم، روشن است که تامدتی، خط راست زیرین را قطع‌نمی‌کند، تا اینکه بازوی دوم‌آن به‌طرف راست بیحرکت، خم شود:



به این ترتیب، از هر نقطهٔ واقع در خارج یك خط راست، دو خط راست«متباعد» می‌توان‌رسم کرد. هیچکدام ازبینهایت خط راستی‌که در داخل این دو خط قرار گرفته‌اند ، خط راست مفروض را قطع نمی-

کنند؛ بنابراین، تنها خطهای راستی که انحراف بیشتری داشته باشند، می‌توانند خط راست مفروض را قطع کنند.

هرکسی که مثل من به اشیاء نگاه می‌کند با من بیاید تابرای او، هندسه جدیدی بسازم!»

به این‌ترتیب، بایای ، به‌عنوان شرط اصلی، انکار اصل‌موضوع توازی را پذیرفت، ولی، دیگر اصل موضوعهای اقلیدس را نگه‌داشت‌و این پرسش را مطرح کرد: با توجه به این شرطها، چه حکمهایی دربارهٔ نقطه، خط راست وصفحه می‌توان بدست آورد؟

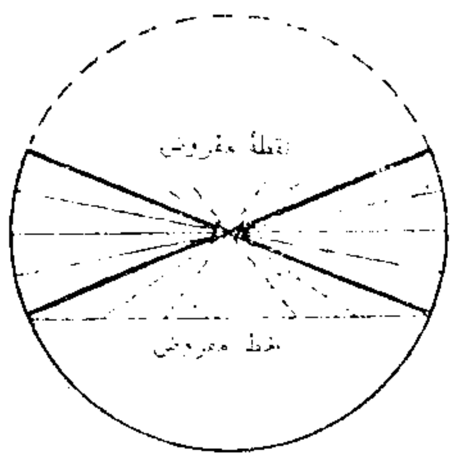
به این ترتیب بودکه هندسهٔ هذلولی (هیپربولیك) بـه وجود آمد (هرشاخهٔ هذلولی نسبت به مجانب خود، شبیه خط «متباعد» است) که به‌کلی باهندسهٔ اقلیدسی متفاوت است.

همزمان با بایای ، دانشمندان دیگری هم امـکان وجود هندسهٔ نااقلیدسی را کشف کردند. مثلاً نیکلای‌لباچوسکی هم درروسیه به‌همین نتیجه رسید. این، یك پدیدهٔ کاملاً عادی است: وقتی که مساله‌ای بـه حدکافی «پخته» شود، درمرحله‌ای ازکار، ریاضیدانانی پیدا می‌شوندکه بدون بستگی با یکدیگر، ودر نقطه‌های مختلف کـرهٔ زمین، وجود آنرا حس‌می‌کنند.

پرسش دیگری هم وجود دارد که از آن نمی‌توان گذشت و باید به‌آن پاسخ داد. صرفنظر از اینکه مـا موفق بشویم یا نـه، اگـر اصل موضوع توازی قابل اثبات باشد ، آیا به معنای این نیست کـه هندسهٔ هذلولی برپایهٔ نادرستی بناگذاشته شده است وبنابراین، باید دیر یازود به انبوهی از تناقضها برخورد کند؟

ماحالا دیگرمی‌توانیم به این پرسش، پاسخ دهیم. موضوع اینست که‌هندسهٔ هذلولی وهندسهٔ اقلیدسی، ازنظر قابل قبول بودن‌آنها،حقوقی کاملاً متساوی دارند. اگر قرارباشدکه‌هندسهٔ هذلولی، درجائی به‌تناقض برخورد کند، هندسهٔ اقلیدسی هم باید متناقض از آب درآید.

این حقیقت‌از اینجا نـاشی می‌شود کـه حتی اگـر از چار چوب هندسهٔ اقلیدسی‌هم‌تجاوزنکنیم، می‌توانیم«مدل» هندسهٔ‌هذلولی را بسازیم این مدل، برای ما آشناست وعبارت از دنیای محدودی است که در آن همهٔ نقطه‌ها وخطهای راست، درداخل دایره‌ای‌که بریك صفحه واقع‌است قرار گرفته‌اند. مادیدیم‌کد نقطه‌ها وخطهای‌راست، به‌این مفهوم محدود خود، با یك شرط اساسی هندسهٔ اقلیدسی سازگارند. می‌توان ثابت کرد که ایـن نقطه‌ها وخطهای راست، در همهٔ اصل موضوعها، بـه جز اصل موضوع توازی، صدق می‌کنند. به جای اصل موضوع توازی، باید نفی آن، یعنی اصل موضوع لوباچوسکی-بایای را قبول کرد:



در اینجا «خطهای متباعد» عبارتند ازخطهای راستی که از نقطهٔ مفروض ونقطه‌های مرزی خط مفروض (یعنی نقطه‌هایی که روی محیط دایره‌اند)

عبور می‌کنند؛ خطهای راستی‌که بین این خطهای متباعد قرارگرفته‌اند، حتی به مفهوم اقلیدسی هم، خط مفروض را (در داخل دایره) قطع نمی‌کنند. به‌همین دلیل است که اصل موضوع لوباچوسکی - بایای بادیگر اصل موضوعهای هندسهٔ اقلیدسی متناقض نیست. دراین دنیای محدود، همهٔ اصل موضوعهای هندسهٔ هذلولی، می‌توانند در کنار هم زندگی کنند.

هندسه‌های مختلف

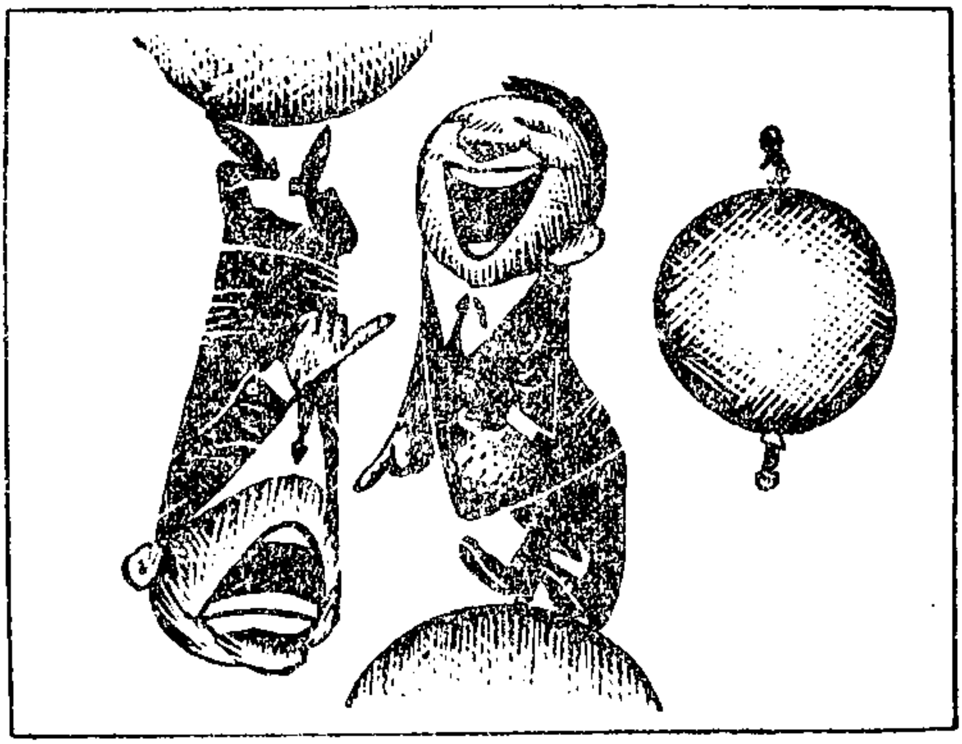
وقتی‌که توانستیم دونوع هندسهٔ متساوی‌الحقوق پیداکنیم،هیچ چیز نمی‌تواند مانع از این شودکه به‌تعدادآنها اضافه‌کنیم. مامی‌توانیم این بازی را، بدون توجه به‌جنبهٔ عینی آن، ادامه دهیم: به جای یکی‌از اصل موضوعها، به شرطی که نتیجه‌ای از دیگر اصل موضوعها نباشد، نقیض‌آنراانتخاب می‌کنیم‌وباتکیه برآن،سعی‌می‌کنیم حکمهایی راثابت کنیم. حتی می‌توان،به‌عنوان آغازکار، اصل موضوعهای به‌کلی‌دیگری را در نظرگرفت. هیچ لزومی نداردکه شرطها را براساس تصورهایی‌که داریم، بنابگذاریم؛ هندسهٔ هذلولی به‌ما نشان دادکه این شرطها، خیلی متزلزل‌اند وضمناً برای دوفرد، که‌تصورهائی متفاوت وخاص خودشان دارند، ممکن است نتیجه‌های مختلفی بدست آید.

بنابراین، می‌توانیم هرچند هندسه‌که لازم باشد، بسازیم. و این تنها یك بازی پوچ وسرگرم کننده نیست. فیزیك امروزی، براساس چنین هندسه‌های انتزاعی، توانسته‌است برگروهی از پدیده‌های جهان واقعی ما، روشنایی ببخشد.

دیدوتصور آدمی، چیزی جامد وصلب نیست و به تدریج وتحت

تاثیر پیشرفت دانش، تغییر می‌کندوشکلهای تازه‌ای به خود می‌گیرد.

وقتی معلوم شدکه زمین یك قرص مسطح نیست، وقتی که‌بشر، به‌این واقعیت‌تسلیم شدکه مردمان‌طرف دیگر زمین «سرهایی روبه‌پایین» دارند، آنوقت دید وتصور بشر، به‌کلی تغییرکرد ورنگ دیگری به خود گرفت.



وقتی که نظریهٔ نسبیت، که در فیزیك امروزی به‌وجودآمده‌است، جای خود رابازکندوبه‌صورت معرفت عمومی‌درآید،آنوقت دیداقلیدسی هم به‌پایان حکومت خودمی‌رسدوآگاهی مردم از واقعیت جهان فیزیکی تصور آنها را تغییر خواهد داد ودیگر متوجه خواهند شدکه هندسه‌ای‌را که امروز انتزاعی به‌نظرمی‌رسد، می‌توان به صورت یك «هندسهٔ‌واقعی» مجسم کرد.

ضمیمه‌ای دربارهٔ بعدچهارم

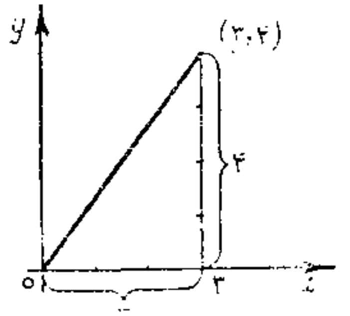
می‌خواهم دوباره به‌کلمهٔ «مدل» برگردم. ما توانستیم در مرزهای هندسهٔ اقلیدسی، «مدل» هندسهٔ هذلولی را بسازیم، به این ترتیب که به کمك دایره، قسمتی ازصفحهٔ اقلیدسی را جداکردیم، سپس، برای هرشکل هندسهٔ هذلولی ، چیز متناظری درداخل دایره و برای هرحکمی ازهندسهٔ هذلولی، حکم متناظری که داخل دایره صادق بود، پیداکردیم. چنین بستگی بین دوشاخهٔ دانش را، پیش ازینهم، وقتی که درجبر، مدلی برای هندسه جستجو می‌کردیم، دیده بودیم. درآنجا، نقطه را متناظر بایك زوج عدد وخط را متناظر بایك معادلهٔ دومجهولی کردیم وبنابراین، قسمت کاملاً معینی ازجبر را جداکردیم، که درآن هرشکل هندسی بانوعی بیان جبری وهرقانون هندسی، به‌صورت یك حکم جبری، داده می‌شود.

ازبرکت این بستگی، می‌توانیم قانونهای هندسی را باروش جبری جستجو کنیم، و برعکس نتیجه‌های هندسی را برای توضیح و بررسی تابعهایی که منحنی آنها را در دست داریم، به کار ببریم.

همهٔ اینها، مربوط به هندسهٔ روی صفحه است، ولی بدون هیچ زحمتی می‌توان به‌فضا هم منتقل کرد. درفضا، برای معین کردن یك نقطه، به سه عدد نیاز داریم (اگر آشیانهٔ پرنده‌ای که قبلاً ازآن یاد کرده‌ایم، دربالای درختی قرارگرفته باشد، برای تعیین دقیق جای آن، بایدارتفاع درخت راهم بدانیم تامعلوم شودکه چه نردبانی باخود برداریم تابتوانیم به‌آشیانه دسترسی پیداکنیم). شکلهای فضائی هم، به‌وسیلهٔ معادله‌هایی باسه مجهول، بیان می‌شوند. این مجهولها را، می‌توان x ، y و z نامید. مثلاً، اگر با معادله‌ای به‌صورت $z=۳x+۲y$ سروکار داشته باشیم،

بلافاصله متوجه می‌شویم که مقدار z، هم به مقداری که برای x انتخاب می‌کنیم وهم به مقداری که برای y انتخاب می‌کنیم، بستگی دارد. می‌گویند که z تابعی است ازدومتغیر (درزندگی، مااغلب به چنین تابعهایی برخورد می‌کنیم: مثلاً پول بیمهٔ عمر، هم به‌سن بیمه‌شده وهم به‌مجموع مبلغ بیمه، بستگی دارد). از هر حقیقتی کـه برای یـك شکل‌هندسی در فضا ثابت شود ، بلافاصله حکمی مربوط به یك تابع دومتغیره نتیجه می‌شود.

در فضا، لازم نیست همه چیز را از اول آغاز کنیم. بسیاری از حکمهایی را که در صفحه صدق می‌کنند ، می‌توان برای حالت فضائی تعمیم داد. مثلاً ، در صفحه، فاصله یك نقطه ـ فرض کنید نقطهٔ(۳,۴)ـ تا نقطهٔ صفررا، به این ترتیب پیدامی‌کنیم:



این فاصله ، عبارتست از وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ‌آن، همان مختصات نقطهٔ مورد بررسی است. بنابر قضیهٔ فیثاغورث ،مربع وتر برابر است‌با مجموع مربعهای‌دوضلع‌مجاور به زاویهٔ قائمه. از آنجا فاصلهٔ مورد نیاز ما برابر است با

$$\sqrt{۳^۲+۴^۲}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که مثلاً، فاصلهٔ نقطه‌ای از فضا که‌با مختصات (۳،۴،۵) معین شده است، تا نقطهٔ صفر، برابر است‌با

$$\sqrt{۳^۲+۴^۲+۵^۲}$$

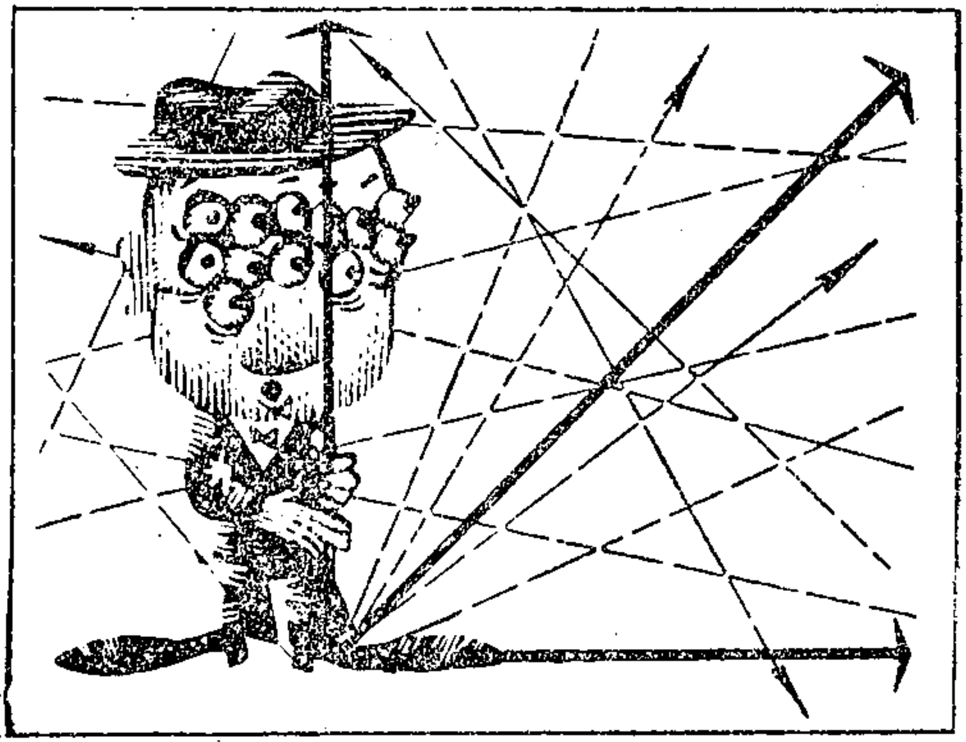
اغلب، می‌توان باچنین تعمیم ساده‌ای، ازصفحه به فضا رفت. بنابراین، بسیاری از حکمهای مربوط به‌تابعهای بایك متغیر را می‌توان به‌سادگی برای تابعهای با دومتغیر تعمیم داد.

ولی، بسیار پیش‌می‌آیدکه ما باتابعهایی سروکار پیدامی کنیم که شامل سه، چهار۔ وبه‌طورکلی،تعداد دلخواهی متغیر هستند. ممکن‌است به نظر آید کـه دراینجا با سدی غیر قابـل عبور روبروهستیم: اگر از صفحهٔ دوبعدی، به فضای سه بعدی می‌رویم، حالا دیگرازفضای سه‌بعدی به‌کجا برویم؟ فضای چهار بعدی، چیزی نیست‌که در اختیارما باشد. با وجود این،مدلهای جبری چنانندکه مثل‌اینکه، چنین فضایی وجوددارد. مثلاً، می‌توان چهارعدد (۳،۴،۵،۶) را نقطه‌ای به‌حساب آورد وعدد

$$\sqrt{۳^۲+۴^۲+۵^۲+۶^۲}$$

را به عنوان فاصلهٔ این نقطه، از نقطهٔ، صفر درنظرگرفت. با این عددها، شبیه عددهایی که‌متناظربا نقطه‌های «واقعی» هستند،کارمی‌کنیم‌ونتیجه‌ها وحکمهایی راکه‌از این راه بدست می‌آوریم،برای‌تابعهای‌سه متغیره، به کارمی‌بریم. می‌توان ثابت کرد، حکمهایی که از این راه وبه‌کمك‌چنین تابعی بدست می‌آید، در واقع هم کاملاً درست‌اند. به‌این ترتیب، باید طوری عمل کرد که‌مثل اینکه بعد چهارم هم وجود دارد.

به همین‌ترتیب، می‌توان دربارهٔفضاهای پنج‌بعدی، شش بعدی،...



تا بینهایت بعدی، عمل کرد. نمونه وشکل ابتدایی فضاها، همیشه همان فضای عادی وآشنای ماست، وهدف این فضاها، شناسایی بیشتر وبررسی دقیقتر تابعهاست.

این روش بررسی، دیگر برای ما عجیب نیست: نقطه‌های فضائی که بعدهای زیادی دارد، نوعی عنصرهای ایده‌آلی هستند، آنها از جهانی خیالی می‌آیند، به‌بررسیهای ما کمك می‌کنند وبعد، اگر بخواهیم ناپدید می‌شوند و برای ما، نتیجه‌هایی از خاصیتهای دنیای واقعی ـ که بدون این عنصرها وجود دارند ـ باقی می‌گذارند.

۱۹. بنابه لرزه درمی‌آید

در هر دورهٔ انتقادی، مسالهٔ پاك کردن نتیجه‌هایی که بدست آمده

است، از هرگونه پوستهٔ زیادی، مطرح می‌شود. همهٔ آنچه که وجوددارد، بارها وبارها ، مورد تجدید نظر قرار می‌گیرد وموضوعهای جاودانی و ماندنی از آنچه که گذرا وموقتی است، جدا می‌شود.

به‌سرچشمه‌هامراجعه می‌شود ومبانی اساسی همهٔ حکمهاونتیجه‌ها مورد تجزیه وتحلیل قرار می‌گیرد تا دوباره وبا اطمینان بیشتری، آن موقعیت بنیانی که بنای باعظمت دانش برآن تکیه کرده است، روشن شود. همهٔ اینها رامی‌توان بایك کلام بیان کرد: اصل‌موضوعی‌کردن. دستگاه اصل موضوعها، بادقت، محتوی هرشاخهٔ ریاضیات را معین می‌کند: ما هرچیزی راکه‌بتوان براساس‌تنها یك‌دستگاه اصل موضوعها بدست‌آورد، مربوط به یکی از شاخه‌های ریاضیات می‌دانیم.

نظریهٔ گروهها

باوجود این، اگر به‌راهی که رفته‌ایم نظری بیندازیم، نمی‌توانیم به این نکته توجه نکنیم که در این بیان‌ما، عنصر مزاحمی وجوددارد: مفهومهایی هستندکه سروکله آنها، در شاخه‌های گوناگون ریاضیات ، پیدا می‌شود. به این ترتیب، صورت‌دیگری ازکار هم خودنمایی‌می‌کند: این مفهومها را، که‌برای شاخه‌های مختلف‌ریاضیات مشترکند،جداکنیم وآنها را، به‌عنوان موضوعهای مستقلی، مورد بررسی قراردهیم.

مثلاً، به یاد بیاوریم که عملهای ضرب وتقسیم عددهای گویا ـ به جز حالت تقسیم بر صفر ـ همیشه ممکن است. ضمناً، نتیجه‌ای که بدست می‌آید، همیشه یك عدد گویاست. ما دیگر یاد گرفته‌ایم که‌ازقبل، صفررا «کنار بگذاریم» وبه این وسیله خود را از پیشامدهای نامطبوع،

حفظ کنیم. حالا، با توجه به‌سطح‌بالای آگاهیهایی که داریم،می‌توانیم بگوئیم که ساختمان عددهای گویا، نسبت بـه عملهای ضرب و تقسیم، یك‌گروه بسته تشکیل می‌دهد.

عددهای‌درست، این ویژگی راندارند. عمل‌تقسیم درموردعددهای درست، ما را به‌خارج این خانواده می‌برد، ولی البته، عـددهای درست هم، همچون عددهای گویا، نسبت به عملهای جمع وتفریق، یـك گروه بسته، تشکیل می‌دهند. حتماً متوجه شده‌اید که این موضوع، تنهاوقتی صحیح است‌که هم باعددهای مثبت وهم باعددهای منفی سروکار داشته باشیم. به‌سادگی معلوم می‌شودکه ازجمع ویاتفریق‌کردن دوعدد درست، باز هم یك‌عدد درست بدست می‌آید. علاوه برایـن در اینجا ، حتی صفر مزاحم هم،نمی‌تواند اشکالی ایجاد کند.

ولی،برای‌اینکه‌عددهایی،نسبت‌به‌عملهای‌معینی،یك‌گروه‌بسته‌درست کنند، لازم نیست‌که تعدادآنها، مثل نمونه‌های قبل، خیلی زیاد باشد. تنها دوعدد

$$-1 \text{ و } +1$$

را انتخاب می‌کنیم. هرچند بار که این عددها را درهم ضرب ویا برهم تقسیم کنیم، درهرحال،یکی از همین دوعدد ۱+ یا ۱ — بدست‌می‌آید.

حالا، سعی‌می‌کنیم ازمرزهای عملهای‌حسابی خارج شویم. بردارها رابه‌یادبیاوریم. هر چندبار ،نتیجهٔ چندبردار راپیداکنیم، بازهم‌یك‌بردار بدست می‌آید. یعنی، دوباره بایك‌گروه‌بسته‌روبرومی‌شویم،واین‌بارنسبت به عمل جمع بردارها. ما به این نکته قبلاً توجه کرده‌ایم که در اینجا باجمع ، به مفهوم انتقالی آن سروکار داریم، مثل وقتی که نیروهاویا

نتیجهٔ حرکتها را با هم جمع می‌کنیم.

به این ترتیب، مفهوم گروه، در بسیاری از شاخه‌ها، مصداق پیدا می‌کند.

می‌توان مثالهای بازهم بیشتری ذکر کرد؛ آنها تنها آنچه‌راکه ما تاکنون به طورعینی دیده‌ایم ، تایید خواهند کرد. درواقع، گروه‌یك مفهوم‌کلی برای رشته‌های‌کاملاً متفاوت ریاضیات است. بررسی‌مستقل این مفهوم، منجربه‌نظریهٔ‌گروهها شده‌است،‌که‌مطالعهٔ‌آن، برای ریاضیات، خیلی پربار وسودمند از آب درآمد. نظریهٔ گروهها، هستهٔ مرکزی‌جبر امروزی تشکیل می‌دهدو کاربرد زیادی در فیزیك نظری پیداکرده است. حتی، هندسه‌های مختلف را می‌توان، خیلی ساده، بـه عنوان قسمتی از نظریهٔ گروهها، مورد بررسی قرار داد.

نظریهٔ مجموعه‌ها

خود گروه، عبارتست از مجموعه‌ای از عضوها، مجموعه‌ای باخاصیتهای معین. مفهوم مجموعه، به طورگسترده‌ای، درریاضیات بـه‌کار می‌رود؛ در هرگام ودر متفاوت ترین شاخه‌های ریاضیات، به این مفهوم برخورد می‌کنیم. در واقع، هروقت‌کـه‌مادر بارهٔ موضوعی در ریاضیات صحبت می‌کنیم به معنای اینست که بایك مجموعهٔ نقطه‌هایا مجموعهٔ عددها یا مجموعهٔ تابعها ویا... سروکار داریم.

کانتور، ریاضیدان آلمانی، مجموعه را بـه‌عنوان موضوع مستقلی مورد بررسی قرار داد و نظریهٔ مجموعه‌ها را به‌وجودآورد.

چند مورد را به یاد بیاوریم. مثلاً، از مجموعهٔ عددهای گویـا صحبت مـی‌کنیم، سپس، مجموعهٔ نقطه‌های متناظر آنـرا ، روی محور

عددها، درنظر می‌گیریم وثابت می‌کنیم که هرنقطه در مجموعهٔ اخیر، یك نقطهٔ تجمع است. این، یکی از مفهومهای مهم نظریهٔ کانتور درمورد مجموعه‌هاست. نقطه‌ای را، نقطهٔ تجمع در مجموعهٔ مفروض گوییم، وقتی که در هرفاصلهٔ دور وبراین نقطه (هرقدرکه این فاصله راکوچك گرفته باشیم)، نقطه‌هایی از مجموعهٔ ما؛ وجود داشته‌باشد.

در این مثال، روشی هم‌که درمورد مجموعهٔ نقطه‌ها به‌کارمی‌رود، دیده می‌شود؛ بازهم مثالی می‌آوریم تا این روش راروشنتر کنیم.

دوباره به‌همسفر همیشگی‌خود، دنبالهٔ عددهای‌طبیعی، برمی‌گردیم:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵،...

هیچ نیرویی نمی‌تواند این دنباله را فشرده‌تر یا بازتر کند. همیشه، هر عدد، از عدد قبلی، به اندازهٔ یك واحد بیشتراست. ولی، اگر مجموعهٔ نامتناهی از عددها را درفاصلهٔ محدودی قرار دهیم، مثلاً دنبالهٔ‌عددهای

$$۱،\ \frac{۱}{۲}،\ \frac{۱}{۳}،\ \frac{۱}{۴}،\ \frac{۱}{۵}،\ldots$$



که‌همهٔ آنها درفاصلهٔ بین صفر وواحد قراردارند، آنوقت بدون شك‌باید جایی در بین این عددها، نقطهٔ تجمع پیدا شود.

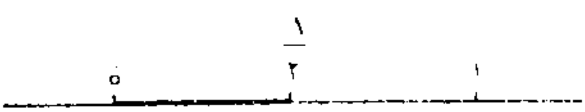
این موضوع را، به‌صورت کلیتری هم می‌توان‌ثابت‌کرد.

فرض می‌کنیم که همهٔ نقطه‌های مجموعهٔ نامتناهی ما، درفاصلهٔ بین ۰ و۱، قرار گرفته باشند:



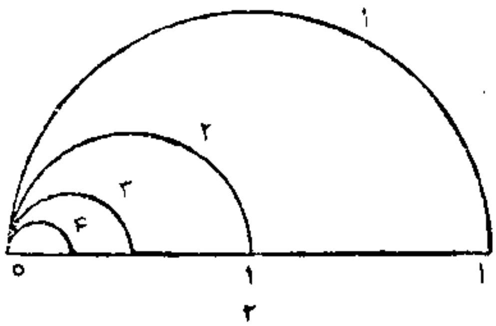
اینکه، این ویا آن نقطه، درکجای این فاصله واقع باشد ، برای مامهم نیست. ایـن فاصله را، نصف می‌کنیم . در اینصورت، دست‌کم دریکی از این دونیمه، بینهایت نقطهٔ مجموعه وجود دارد. اگر درهردو نیمه، به‌تعداد محدودی نقطه ازمجموعهٔما قرارگرفته باشد،ومثلاً در نیمهٔ راست، یك میلیون ودرنیمهٔچپ، ده ملیون ، دراینصورت،تمام‌مجموعهٔ ماشامل یازده ملیون عضو می‌شود. درست‌است که‌این تعداد،کم نیست، ولی، به‌هرحال تعدادمحدودی است.درحالیکه،بنابر شرط، تمام‌مجموعهٔ ما ، نامتناهی بود.در مثال ما، ایـن تعداد بینهایت نقطه، در نیمهٔ چپ فاصله، قرار می‌گیرد.

حالا، به جای فاصلهٔ کامل نخستین، نیمه‌ای از آنرا کـه شامل، بینهایت نقطهٔ مجموعـه است، درنظر می‌گیریم (اگر هـر دونیمه، شامل بینهایت نقطه باشد، یکی‌از آنهارا، به‌دلخواه، انتخاب می‌کنیم). به‌این ترتیب، تنها نیمهٔ چپ فاصلهٔ نخستین را، انتخاب می‌کنیم:



همان عمـل را در اینجا هم تکـرار مـی‌کنیم ، یعنی ، فـاصله اخیر را دوباره‌نصف می‌کنیم. بازهم، دست‌کم دریکی ازدونیمهٔ جدید، مجموعهٔ نامتناهی نقطه، وجودخواهدداشت. همین‌نیمه را دوباره نصف می‌کنیم وبه همین ترتیب، می‌توان‌نصف‌کردن واستدلال کردن‌راتابینهایت‌ادامه داد. دنباله‌ای از فاصله‌ها بدست‌می‌آید که‌مرتباً کوچکتر می‌شوند وهـر کدام ازآنها دردرون فاصلهٔ قبلی قرارگرفته است. در مثال ما، می‌توان

این دنباله را، اینطور نشان داد:



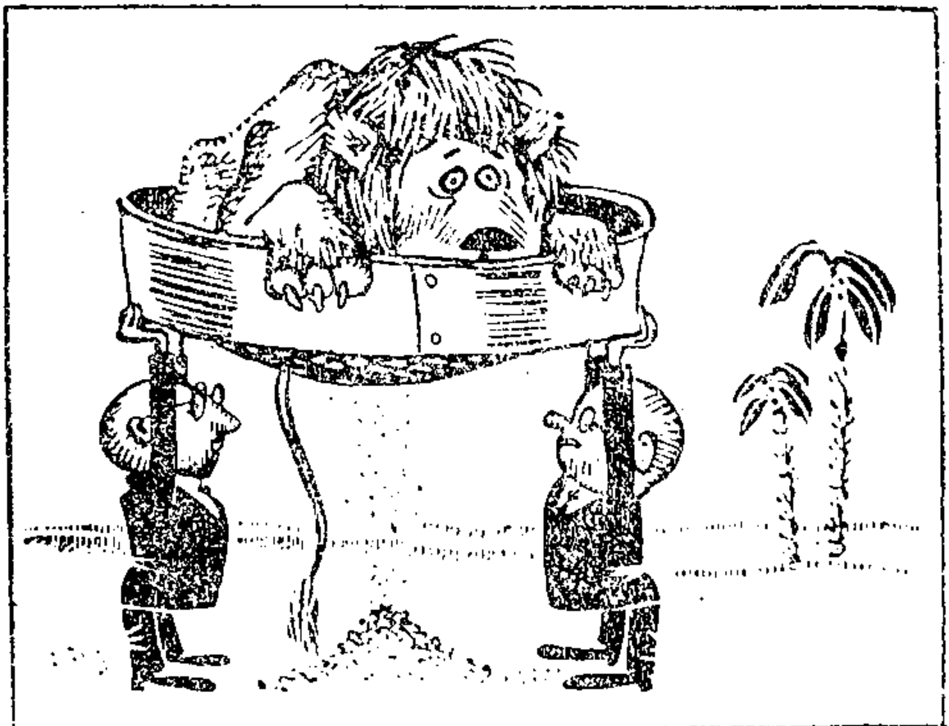
به‌روشنی دیده‌می‌شود که طول این فاصله‌ها، به‌سمت صفر میل می‌کند. این مطلب، همان «هدیهٔ شوخی آمیز» را به‌یادمی‌آورد که در داخل هرپاکت، پاکت کوچکتری قرارداشت‌وسرآخر، کاغذ مچاله شده‌ای در وسط آخرین پاکت، گذاشته شده بود. درست به‌همین ترتیب، برای فاصله‌های ماهم، نقطهٔ منحصری وجوددارد؛ که درهمهٔ آنها مشترك است. وایـن ، همان نقطهٔ تجمع مجموعه است.

در واقع، اگر فاصلهٔ کوچکی در دوروبراین‌نقطه انتخاب کنیم(می توان این فاصله‌رادرمثال‌ما، باشمارهٔ خیلی‌بزرگ، ولی‌محدودگرفت-مثلاً فاصلهٔ هزارم یا فاصله صدملیونیم یا...)، بـازهم در داخل، آن بینهایت فاصله وجوددارد‌که درهرکدام ازآنهامی‌توان بینهایت نقطه ازمجموعهٔ خود را پیداکرد.

ماديگر به‌چنان‌سطحی از دانش رسیده‌ایم که می‌توانیم به ایـن پرسش پاسخ دهیم که ریاضیدان چگونه شیر را در صحرا شکار می‌کند.

کلی‌ترین روش‌شکارشیر، روش‌فیزیکی - تجربی است. این‌روش به قدری ساده است که‌هرتازه‌کاری می‌تواند، بدون هیچ زحمتی، آنرابه کار ببرد. فیزیکدان تجربی، صحرا را باهمهٔ آنچه‌که درآنست در غربال

می‌ریزد والك می‌کند، آنچه که‌از شبکهٔ غربال بیرون می‌ریزد، صحرا، وآنچه که درغربال باقی می‌ماند، شیر است:



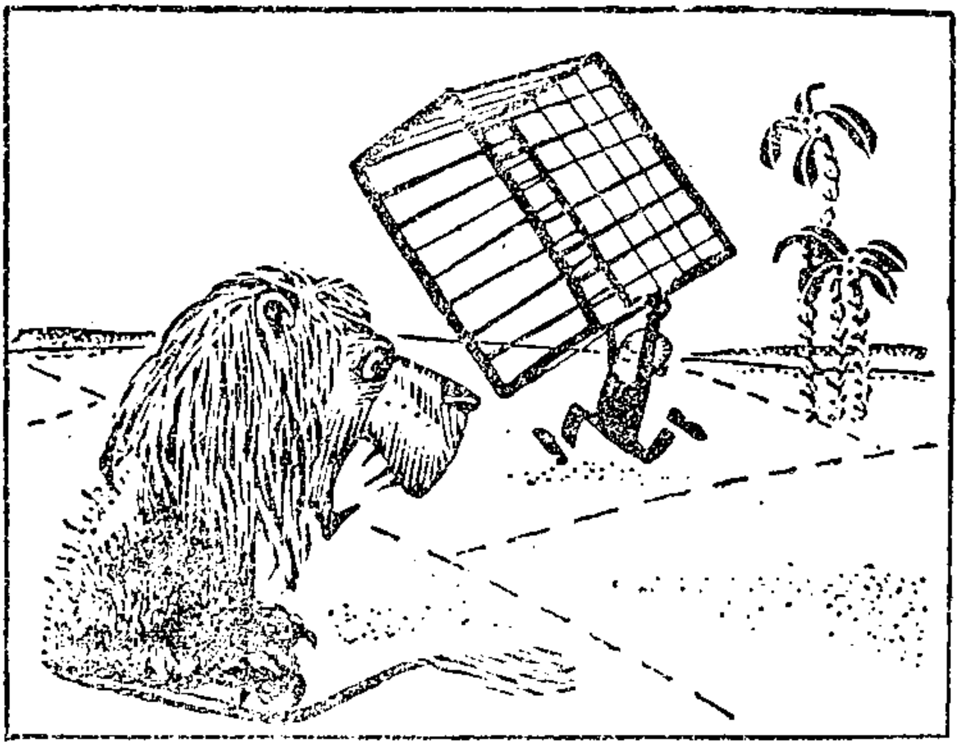
ولی، ریاضیدان اینطور استدلال می‌کند:

دوحالت وجوددارد.

حالت اول. شیر خوابیده است.

قبل از همه، قفسی آماده می‌کنیم که از پایین باز، واندازهٔ آن بزرگتر ازشیرباشد. سپس، صحرا را به‌دوقسمت مساوی تقسیم می‌کنیم دست کم شیردر یکی ازاین دوقسمت است (اگر شیر روی خط تقسیم خوابیده‌باشد، اینطوربه‌حساب‌می‌آوریم که درهردوقسمت‌صحراقرارگرفته است). به این ترتیب، بانصف صحراسروکارداریم. این‌قسمت را دوباره طوری به دو نیمه تقسیم‌می‌کنیم که شیر دریکی از آنها قرار گرفته

باشد. اگر این نصف‌کردن را ادامه دهیم، مرتباً باقطعه‌های کوچکتری‌از صحرا سروکار پیدامی‌کنیم. دیر یازود ، یکی از این قطعه‌ها کوچکتراز قاعدهٔ قفس می‌شود. شیرهم در همین قطعه است. قفس را در همین قطعه می‌گذاریم ـ وشیرشکار شده‌است:



حالت دوم . شیردرصحرا می‌دود. دراین حالت ، روش ما قابل استفاده نیست.

پایان. نقطه.

واین همهٔ آنچیزی است که بـه‌نظریهٔ مجموعهٔ نقطه‌ها ، مربوط می‌شود.

مادیگر با نوع استدلالهای نظری مجموعه‌ها (و نـه‌فقط مجموعهٔ نقطه‌ها)، آشنا هستیم. ماباروش مقایسه‌آشناهستیم، وبه‌کمك‌آن‌توانستیم ثابت‌کنیم‌که مجموعهٔ عددهای‌گویا با مجموعهٔ عددهای طبیعی، همقوت

است، در حالیکه، قوت مجموعهٔ عددهای گنگ‌بیشتر از قوت مجموعهٔ عددهای گویاست. از این روشها، برای هرمجموعه‌ای می‌توان استفاده کرد. به یاد بیاوریم که‌چطور بامفهوم مجموعه آشنا شدیم: ازمجموعهٔ زوجهایی که می‌رقصند، تا مجموعه‌هایی که‌کمتر خوش آیندبود.

آنچه‌راکه دربارهٔقوت‌مجموعه‌ها می‌گوییم، می‌تواندبه زوجهایی که می‌رقصند، به عددهای حقیقی وبه هرآنچه‌که‌بتوان به زبان‌درآورد، مربوط‌کرد. و کانتور هم، به‌خصوص چنین «مجموعه‌های کلی» را مورد بررسی قرارداد.او، دربارهٔ قوت مجموعه‌های نامتناهی، نتیجه‌های بسیار زیبایی پیداکرد.اندیشهٔ کانتور چنان پربار بود که امکان داد مفهومهای عددی محدود را، در بارهٔ بینهایت به‌کارببریم. مثلاً، اوثابت کرد که به جزقوت مجموعهٔعددهای طبیعی، بسیاری قوتهای دیگرهم وجوددارد. برای هرقوتی، هرقدر که بزرگ باشد، بازهم مجموعه‌ای باقوت بالاتر پیدا می‌شود. وایبتس، شاعر مجار، این قوتهای بالاتر را «بناهای‌بیکران ونامحدودی که رویهم انباشته شده‌اند »می‌نامد.

کانتور : همچون عملهایی که در مورد عددهای « کوچك» به‌کار می‌رود، عملهای حسابی جمع وضرب را در مورد قوتهاهم‌به‌کاربرد .

بازی قشنگی است: یك بازی بزرگ با معنا ومفهومی بزرگ ؛ یعنی بازی بابینهایت . به نظر می‌رسد که عقل انسانی، هرگز به‌اوج‌خود نمی‌رسد.

پارادوکسها

دوباره، تماسی بنابه لرزه در می‌آید.

در ریاضیات، وتا حد زیادی در همهٔ دانشهایی که به آن مربوط

است، در اواخرسدهٔ گذشته، تناقضها واعتراضهای جنجالی زیادی، یکی بعد از دیگری خودنمایی کرد. وسرآخر معلوم شد که لانهٔ تناقضها ، در نظریهٔ مجموعه‌هاست: درشالوده وبنیانی‌که تردید دربارهٔ‌آن، کفر مطلق بود.

در انبوه‌تناقضهایی که‌پیدا شده بود، باید به‌خصوص بـه یکی از جدی‌ترین آنها توجه کرد، که به نام پارادوکس‌راسل مشهور شده است. این پارادوکس را، به صورتی که تاحد زیادی شوخی بـه نظر می‌رسد، مطرح می‌کنیم.

تعریف می‌کنیم: سلمانی ارتش به‌سربازی‌گفته می‌شود که‌صورت همه‌سربازانی ازواحد را، که‌نمی‌توانند خودشان را اصلاح‌کنند، بتراشد. ضمناً، برای صرفه‌جوئی دروقت، این سرباز سلمانی نباید صورت کسانی را که قادر به اصلاح خود هستند، بتراشد. حالا، می‌خواهیم روشن‌کنیم که تکلیف این سرباز باخودش چیست؟ آیاباید صورت خودش رااصلاح کند یا نه؟

اگر پاسخ مثبت بدهیم، به معنای اینست که اوقادر بـه اصلاح صورت خود است، ولی، دراینصورت منع شده است کـه صورت چنین شخصی به وسیلهٔ سلمانی واحد، اصلاح شود.

اگرپاسخ منفی بدهیم، در اینصورت، او ازجملهٔ‌کسانی است که صورت خود را اصلاح نمی‌کند، وبنابراین، وظیفهٔ سرباز سلمانی(یعنی خودش) است‌که به اصلاح صورت او بپردازد!
عجب وضع نامناسبی!

روشن است که در این شوخی، باهمهٔ منطقی بـودن محتوی آن،



نمی‌توان، موقعیت دقیق وجدی مطلب را متوجه شد. حالا، به‌مثال‌جدی‌تری می‌پردازیم.

معمولاً، خود مجموعه، نمی‌تواند یکی از عضوهای خودش باشد. مثلاً، عضوهای مجموعهٔ عددهای طبیعی، عددهستند ونه مجموعه؛ وخود این مجموعه، نمی‌تواند به‌عنوان یکی ازعضوهای خودش به حساب آید، یعنی، به طورخلاصه، مجموعهٔ عددهای طبیعی، خود یك عدد طبیعی نیست.

روشن است که‌ما اغلب با مجموعه‌هایی هم سروکار پیدامی‌کنیم که‌هرعضوآنها، خود یك‌مجموعه است. مثلاً، همهٔ انواع ممکن‌مجموعه‌های عددی را در نظر می‌گیریم، وهمهٔ آنها را دریك مجموعه، گرد می‌آوریم. مثلاً، یکی از عضوهای این مجموعه عبارتست از مجموعهٔ

عددهای طبیعی، عضو دیگر آن، مجموعهٔ عددهای کوچکتر از ده وغیره. هرعضو این مجموعه، خود یك مجموعه است. با وجود این، خود این مجموعه نمی‌تواند عضو خودش باشد، زیرا، مجموعه‌ای را می‌توان به عنوان یك‌عضو به حساب آورد که تنها از عددها تشکیل شده باشد، در حالیکه مجموعهٔما، نه ازعدد، بلکه از مجموعه‌ها، درست‌شده‌است.

حالا، همهٔ مجموعه‌های ممکن را، دریك مجموعه گرد می‌آوریم. در اینصورت، به‌چنان نمونه‌ای ازمجموعه‌هامی‌رسیم که خودش هم،یکی ازعضوهای خودش می‌شود. زیرا، خودش یك مجموعه است و ماهم هر مجموعهٔممکن را،عضوی‌از این مجموعه دانسته‌ایم.

اگر خواننده‌ای گمان‌کند که درك دوقسمت اخیر برایش دشوار است، می‌تواند از آنها بگذرد و بدون اینکه روی آنها معطل شود، مطمئن باشدکه می‌تواند بدون‌آنها، کتاب را ادامه دهد. تنهاکافی‌است که‌این دید رابپذیریم: یك مجموعهٔ متعارف نمی‌تواند دارای چنین‌خاصیتی باشد. و مجموعهٔ متعارف به مجموعه‌ای‌گوییم‌که نتواند به‌عنوان یکی از عضوهای خودش به حساب آید؛ ضمناً، ما به این مطلب هم توجهی نمی‌کنیم‌که در دنیا، مجموعه‌های دیگری هم وجود دارد. فرض‌می‌کنیم که بتوانیم همهٔ مجموعه های متعارف را، دریك مجموعه‌گرد آوریم.

آیا این مجموعه‌ای‌که بدست می‌آید، خود یك مجموعهٔ متعارف است؟

اگراین‌مجموعه،متعارف‌باشد، دراینصورت‌بایدمثل بقیهٔ‌مجموعه‌های‌متعارف،دربین عضوهای‌خودش قرارگیرد. ولی، صبرکنید! اگراین مجموعه، متعارف باشد، حق ندارد، عضو خودش باشد (هر مجموعه‌ای

که عضو خودش باشد، متعارف نیست).

خوب، پس لابد این مجموعه نا متعارف است! ولی اینحالت‌هم درست درنمی‌آید، زیرا اگرنامتعارف‌باشد مجبوراست بریکی‌ازعضوهای خودش منطبق باشد، درحالیکه هرعضواین مجموعه،یك مجموعهٔمتعارف است!

به این‌ترتیب، اگراین مجموعه را متعارف فرض‌کنیم، نامتعارف ازآب درمی‌آید واگر آنرانامتعارف بگیریم، بایدمتعارف باشد.و درهر صورت، گرفتارتناقض می‌شویم.

اینجا یك بن‌بست است وهیچ کاری از دستمان برنمی‌آید.

نقطه‌نظر دیگری را هم نمی‌توان پذیرفت: ما، درنظریهٔ مجموعه‌ها خیلی تندپیش رفتیم، به‌ایستیم وبه شاخهٔ ساده‌تری ازریاضیات برگردیم شاخه‌ای که درآنجا، خودرا امنتر احساس کنیم. ما می‌دانیم که نظریهٔ مجموعه‌ها چگونه به‌وجود آمد ومی‌دانیم کـه چگونه در همهٔ رشته‌های ریاضیات‌نفوذکرد. اگر نظریهٔ مجموعه‌ها نادرست بـاشد ، آنـوقت هیچ جای‌آسیب‌ناپذیری در ریاضیات باقی نمی‌ماند.

تابه امروز نتوانسته‌اند، شکافی را که بـه‌این مناسبت پیدا شده است، پرکنند. باوجوداین، نه‌برای ماوشما،ونه برای‌آنهاییکه درهرگام ازکارهـای روزانـهٔ خود، ازریاضیات استفاده مـی‌کنند ، هیچ دلیلی برای‌اضطراب ونگرانی وجودندارد.

درست‌است‌که اغلب، رفتارریاضیدانان‌هم‌دراین مورد، مثل‌رفتار بیشتر مردمی است‌که باخطر ترسناکی روبرو باشند؛ ولی، قسمت عمدهٔ آنها، مطلقاً به‌آنچه‌که‌پیش آمده است توجهی نمی‌کنند و هـرکدام از آنها، کار قبلی خودرا دنبال می‌کنند وحتی در برابرکسانی‌کـه وجود

خطر را بـه آنها گوشزد می‌کنند، بـرانگیخته می‌شوند.

با همهٔ اینها، بعضیها تلاش می‌کنند تا ریاضیات را ازاین موقعیت ناجور، نجات دهند.

تلاش اصلی، طبعاً دراینجهت است که اشتباه پارادوکس راسل را پیدا کنند. خودراسل، عقیده داشت که اشکال درتعریف مجموعه است ، این تعریف، یك «دورباطل» ایجاد می‌کند،زیرا درتعریف آن، از مفهوم خود مجموعه، که باید تعریف شود ، استفاده می‌کنند. همهٔ مجموعه‌های متعارف را ، تنها وقتی می‌توان بـه‌صورت یك مجموعه گردآورد کـه بتوان مسالهٔ متعارف بودن مجموعه‌ای راکه بدست می‌آید حل کرد،این مساله که آیا این مجموعه، عضو خودش هست یا نه! دوباره یك نتیجهٔ «مضحك»: بـرای اینکه بتوانیم مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هـای متعارف را بسازیم، باید ابتدا خود این مجموعه را، که هنوز تشکیل نشده است ، بررسی کنیم.

ولی، حقیقت اینست که درهمهٔ شاخه‌های ریاضیات، ودر هرگامی که برمی‌داریم، باچنین دورهای باطلی برخورد می‌کنیم. ما از عددهای طبیعی گفتگو می‌کنیم، بسیار خوب! ولی ، چگونه بـه ایـن راه گـام گذاشته‌ایم؟همه‌جاتعریفهایی رابه کارمی‌بریم که‌ازاین‌قبیل‌اند: «کوچکترین عددی را انتخاب می‌کنیم که دارای فلان خاصیت باشد». ایـن عدد، در تعریف خود عدد هم شرکت می‌کند. درواقع، کوچکترین عدد را، ازبین همهٔ عددهایی که دارای خاصیت معینی هستند، می‌توان انتخاب کرد؛ در بیان این عددها، خوداین عددهم، به عنوان کوچکترین عدد، وجوددارد.

تلاش قطعی برای رهاشدن ازاین وضع، به‌وسیلهٔشهودیان(کسانیکه به اشراق والهام اعتقاد دارند) ودر رأس آنها، براور، انجام گرفت (نام «شهود» خیلی مناسب انتخاب نشده است وبسیار پیش آمده است که از این نامگذاری سوء استفاده شده است). اندیشه‌های شهودی، خیلی پیش ازآنکه‌پارادوکسهای نظریهٔ مجموعـه‌ها پیداشود، وجود داشت، منتهی، این پارادوکسها، بـه آن تحرك واقعی داد ومثل مهمیزی بودکـه‌براسب اشراقیون نواخته شد. اشراق جدید، با نام براور، بستگی جدی دارد.

براور، تمامی ریاضیات پیشین را ردکرد وکوشید ازنو،این دانش را برپایهٔ کاملاً تازه‌ای بسازد. او، تنها از چیزهایی استفاده می کند که می‌توان آنها را به نحوی ساخت ویازمانی ساخته شده‌اند و حقایق غیر قابل انکاری شده‌اند وبا دستاویز هیچ پاردوکسی، خراب نمی‌شوند. براور «استدلالهای محض»، مثلاً «قضیهٔ اساسی جبر» را ردمی‌کند، زیـرا این نظریه، روشی برای بدست آوردن ریشه‌های معادله، بدست‌نمی‌دهد. براور مطلقاً به «مسالهٔ مبرم و مهم‌بینهایت»اهمیتی‌نمی‌دهد، زیرا، ما تنها می توانیم تعداد محدودی ازعضوهای مجموعه را بسازیم، ولواینکه بتوان روند ساختن را، ادامه داد. اگرنقطه نظر براور را بپذیریم، بایدمجموعهٔ نامتناهی را تنها بـه صورت «بینهایت بـالقوه» بـه رسمیت بشناسیم، بینهایتی که دائماً در حال سازمان یافتن است، ولی هرگز نمی‌تواند به عنوان «وجودی» آماده وتمام شده، مورد بررسی قرارگیرد.

به این ترتیب، از ریاضیات رسمی، جز ویرانه‌ای باقی نمانـد، و آنچه هم کـه دربرابر بلیه‌ها، مقاومت‌کـرد، به صورتی مبهم و پیچیده درآمد.

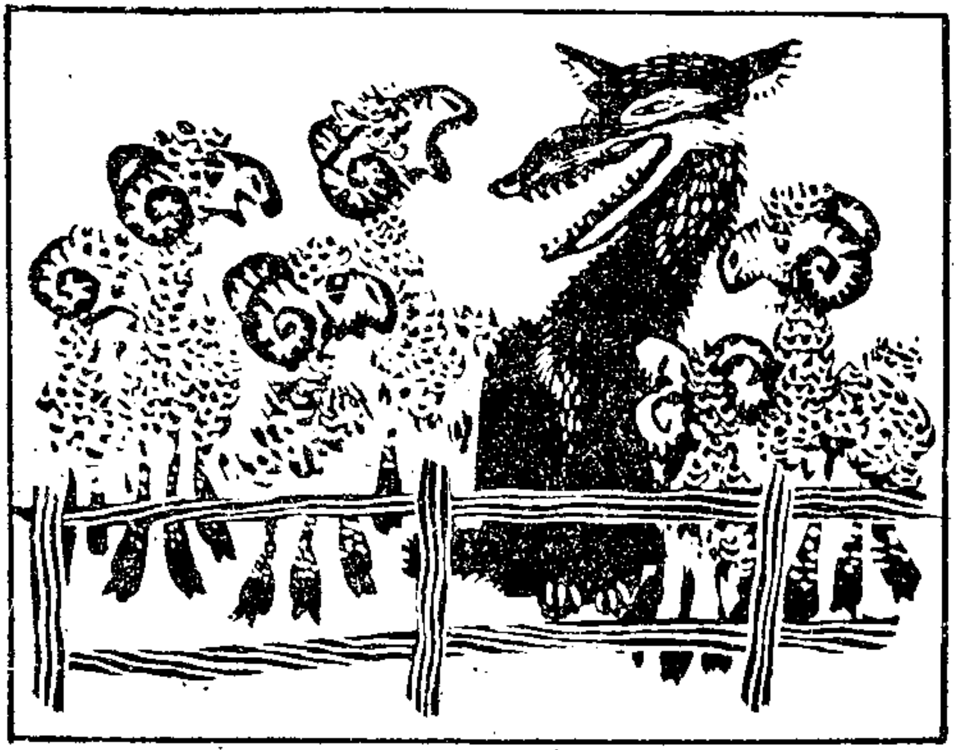
درحالا حاضر، به نظر می‌رسدکه تنها راه‌رهایی، مسیری باشدکه هیلبرت نشان داده است. در این‌مسیر، باکشفهایی برخورد می‌کنیم، که از چارچوب مسالهٔ نخستین، یعنی جستجوی روش مبارزه باخطر، بیرون رفته است.

شاخهٔ تازه وبسیار پرثمری در ریاضیات به وجود آمد، که ما دراینجا،دربارهٔ آن به گفتگو می‌نشینیم.

۲۰. قالب آزاد می‌شود

نباید گمان‌کرد که نظریهٔ مجموعه‌ها، بار مسئولیت تناقضها را تابه امروز بردوش دارد. وقتی‌که زمانش فرارسید ـ وتناقضها دوران پرالتهاب‌ورود خودراگذراندند ـنظریهٔ مجموعه‌ها،که به‌صورت‌ابتدایی و«ساده‌لوحانه» بود، به نظم درآمد ودستگاه اصل موضوعی‌آن‌تعیین‌شد. دراین موقعیت ، ریاضیدانان متمایل بـه محدود کـردن مفهوم مجموعه شدند وبه‌کمك قیدوشرطها، میدان‌آنرا تنگترکردند، آنچه راکه‌باارزش بودنگه داشتند واز مجموعه‌هایی که موجب‌ناراحتیهاو حادثه‌های‌ناگوار شده بود، چشم پوشیدند. باوجود این،چنین روشی، خیلی ساختگی بود. اگر از کلام هانری پوانکاره، دانشمند معروف، کمك بگیریم،بایدبگوییم که ماکوشیدیم برای سالم نگاه داشتن خود از حملهٔ گرگ، حصاری به دور چراگاه بکشیم، ولی این کار را چنان به انجام رسانده‌ایم که هیچ اعتمادی به اینکه‌گرگ درداخل چراگاه باقی نمانده باشد، وجودندارد. هیچ‌تضمینی‌وجود نداردکه دوباره سروکله تناقضهای جدیدی پیدانشود.

هیلبرت ،یکی ازبزرگترین ریاضیدانان عصرما، در طول بیست‌سال



آخرزندگی‌پربار خود، کوشش کرد تا تمامی خلوتگاههای‌درون‌چراگاهی را که از اصل موضوعها ساخته شده بود، روشن‌کند. اوقبول‌کردکه‌عدم اعتماد به تعریفی‌کـه درآن «دورباطل» ، «استدلالهای خالص» و « مبرم بودن بینهایت»وجود دارد، امری طبیعی واساسی است؛ ودر زیرهرکدام ازآنها، ممکن‌است خطری‌پنهان شده باشد.پس‌چرا ما از این مفهومهای «فوق محدود» خطرناك، که از عقل ودرك محدود ما بالاتر است،استفاده می‌کنیم؟

به‌نظرمی‌رسد که دلیلهای قانع‌کننده‌ای داریم‌که به این مفهومها توجه می‌کنیم وازآنها چشم پوشی‌نمی‌کنیم. این مفهومها، به ماامکان ساختن‌نظریه‌های پرباری را می‌دهدکه‌بستگی بین‌رشته‌های متفاوت دانش را به خوبی نشان دهد،رشته‌هایی که، بدون این نظریه‌ها، بسیار دور از

هم، به نظرمی‌رسند. بدون این نظریه‌ها، باید به پراکندگی تن‌دردهیم‌و ریاضیات را، همچنین شهودیها، پاره پاره‌کنیم. ما، به‌اینجهت دربرابر «مفهومهای خطرناک»، میدان را خالی نمی‌کنیم که تنها بـه یاری آنهاست که می‌توان ریاضیات را در یك واحد بزرگ، متحدکرد.

نقش‌روشهای فوق‌محدود درمنطق، شبیه‌نقش خط راست نامحدود یا واحدموهومی i ، درریاضیات است. آنها رامی‌توان،همچون‌عنصرهای «ایده‌آلی» منطق درنظرگرفت‌وباآنها، مثل هرعنصر ایده‌آلی دیگر، عمل کرد: هروقت‌که لازم باشد، ازآنها استفاده می‌کنیم، ولی ضمناًهمیشه به‌این موضوع اساسی توجه می‌کنیم که بـا دستگاه قـانونهای قبلی‌ما، تناقضی به‌وجودنیاورند. به‌این ترتیب، دربرابراین‌مساله قرارمی‌گیریم: آزمایش بی‌تناقضی روشهای فوق محدود.

منطق صوری

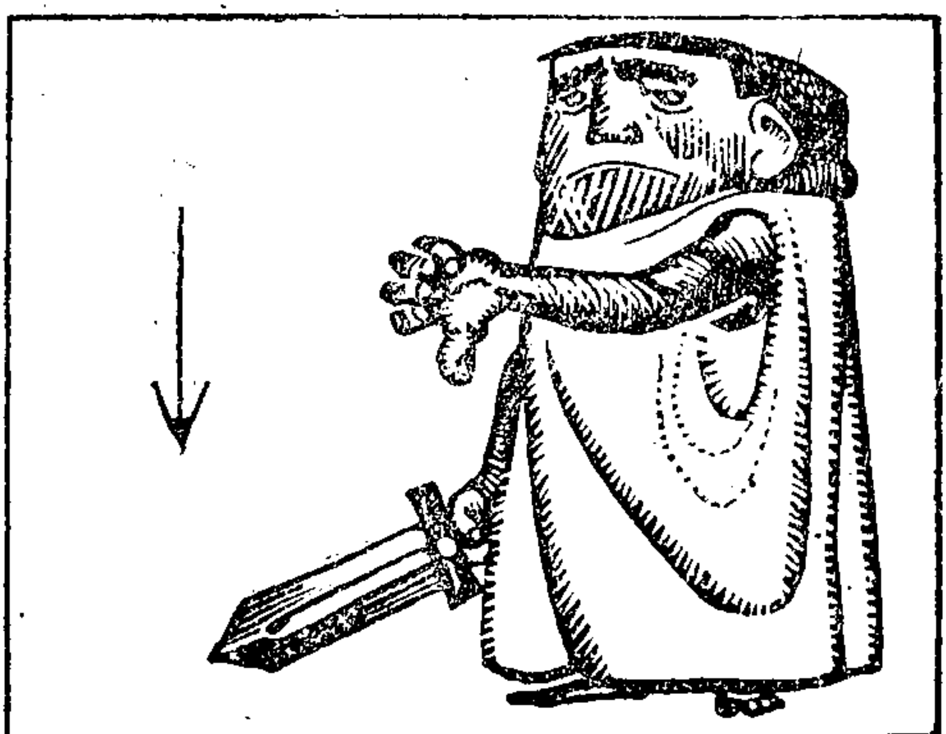
برای رسیدن‌به چنین هدفی، هیلبرت تصمیم گرفت،خود منطقی‌را که در ریاضیات به کار می‌رود ـ روشهای نتیجه گیری و استدلال ـبه عنوان موضوعی از ریاضیات، مورد بررسی قرار دهـد. درگام نخست، می‌بایست استدلال را،ازهرگونه تصادفی که به‌خاطر روش معمولی بیان فکر پیدامی‌شود، پاك‌کرد وجنبه‌های‌ناروشن‌و بی‌قیدوبندراکنارگذاشت.

عدد می‌تواند موضوعی برای بررسیهای دقیق باشد، زیرا درآنجا گفتگو از پنج انگشت دست یا پنج گزاره نیست، بلکه ازآنچه که‌برای همۀاین چیزهامشترك است، صحبت می‌کند: یك قالب‌محض، یك‌صورت خالص. این قالب محض، عدد نامیده می‌شود وبا نشانۀ «۵» مشخص‌می شود. اگر می‌خواهیم پیامی در بارۀ موضوعهای گوناگون مورد بررسی

خودقراربدهیم، بایددقیقاً از همهٔ انواع مشخص مربوط بـه محتوی آنها، جدا شویم. درگزاره‌های «۴=۲×۲»، «از دو نقطه، همیشه می‌توان یك خط راست عبور داد» و «برف سفید است»، تنها به چیزی علاقمندیم کـه در همهٔ آنها مشترك است: اینکه همهٔ این گزاره‌ها درست‌اند. برای این حقیقت (یعنی دستی یك گزاره) می‌توان نشانهٔ تازه‌ای در نظر گرفت و مثلاً ↑.

برعکس، آنچه که درگزاره‌های «۵=۲×۲»، «دوخط راست در دونقطه یکدیگر را قطع می‌کنند» و «برف سیاه است»، از لحاظ منطقی مشترك است، نادرست بودن آنهاست؛ کـه می‌توان آنرا با نشانهٔ ↓ مشخص کرد.

(رومیهای قدیم، وقتی که انگشت بزرگ خود رابه‌طرف بـالامی‌ـگرفتند، به‌معنای آن بودکه‌باید برده را آزاد کرد ووقتی که‌آنرابه‌طرف پائین می‌گرفتند، به معنای این بود که برده آزاد نمی‌شود).





ما در ریاضیات، تنها به‌گزاره‌هایی علاقمندیم که یکی از این‌دو معنای منطقی را داشته باشند (یعنی گزاره‌هایی که درست یا نـادرست باشند).

به‌این ترتیب، محاسبهٔ جدیدی پیدا می‌شودکه از محاسبهٔ عددهای طبیعی هم ساده‌تر به نظرمی‌رسد. عددهای طبیعی، بینهایت زیادند ، در حالیکه دراینجا،ما تنها با دوحالت، دومفهوم،سروکار داریم وبنابراین، خیلی زود می‌توانیم «جدول ضرب» را بنویسیم.

چون گفتگو از محاسبه است، به عملهای منطقی هم نیاز داریم، یعنی باید بستگی بین گزاره‌های جداگانه‌ای‌که درهرگام در ریاضیات‌با آنها برخورد می‌کنیم، بشناسیم.

ریاضیدانی هم که‌هیچکدام از زبانهای دنیا را نداند، به سادگی

می‌تواند ازبستگیهاسر درآورد. کافی‌است کتاب ریاضی را، که به‌زبان ناآشنایی‌نوشته شده است، بازکندوببیند که چه چیزهایی را در جریان مطالعه،باید ازکتاب لغت پیدا کند. دوریاضیدان باکمال تعجب متوجه می‌شودکه اگر کاملاً با واژه‌های «نه» ، «و» ، «یا» ، «اگر ـ آنگاه» ، «درآنصورت وتنها در آنصورت» ، «هر» ، «وجوددارد» و «آنچه که» آشنا باشد،هرکتاب ریاضی خارجی را می‌تواند بخواند، زیرا همه‌چیز را به راحتی می‌فهمد . علت این امر آنست که فرمولها در همه کتابها یکجورنوشته می‌شود وتنها، برای ارتباط مطلبها، ازاین کلمه‌هااستفاده می‌شود. وبستگیهای مورد نیاز منطقی هم، همین واژه‌هایی است که در اینجا از آنها نام بردیم.

مثلاً ببینیم‌که جدول ضرب»واژهٔ «نه» چگونه است؟ خیلی‌ساده: روشن است کـه نفی یك گزارهٔ درست (مثلاً «۲ × ۲ برابر ۴ نیست»)، یك‌گزارهٔ نادرست می‌شود؛ ونفی گزارهٔ نادرست (مثلاً «۲ × ۲ برابر ۵ نیست») یك گزارهٔ درست است؛ وهمه جدول چنین است:

$$\downarrow = \uparrow \text{ نه}$$

$$\uparrow = \downarrow \text{ نه}$$

واژهٔ «نه» را می‌توان به طور خلاصه، مثلاً بانشانهٔ $\neg$ نشان داد. بنابراین مثلاً

$$\neg(۲ \times ۲ = ۵)$$

عبارتست ازنفی‌گزارهٔ $۵ = ۲ \times ۲$. با به‌کاربردن‌این نشانه، جدول مربوط به واژهٔ «نه»، به اینصورت درمی‌آید:

$$\neg\uparrow = \downarrow$$
$$\neg\downarrow = \uparrow$$

به‌همین سادگی می‌توان جدولی برای عمل منطقی که بارابط«و» بیان می‌شود، نوشت. اگر دوگزارهٔ درست را با واژهٔ «و» به هم مربوط کنیم،دوباره، به‌گزاره‌ای درست‌می‌رسیم؛ مثلاً، گزارهٔ «۴=۲×۲واز هردو نقطه یك خط راست وتنها یك خط راست عبورمی‌کند»، یك گزارهٔ درست است. به این ترتیب

↑ و ↑ = ↑

ولی، اگر دست‌کم یکی از گزاره‌هایی که به وسیلهٔ رابط «و» به هم مربوط شده‌اند ، نادرست باشد ، تمام نقشه خراب می‌شود : گزارهٔ «۴=۲×۲و ۷=۳×۲ » یك گزارهٔ نادرست است، ولواینکه یکی از پیامها، درست باشد. و دیگر روشن است که اگر رابط « و » دوگزارهٔ نادرست را به هم مربوط کرده باشد، یك‌گزارهٔ نادرست پیدا می‌شود. به این ترتیب، جدول مربوط به رابط « و » را می‌توان به اینصورت تمام‌کرد:

↑ و ↓ = ↓

↓ و ↑ = ↓

↓ و ↓ = ↓

وما، همهٔ‌حالتها رابررسی کردیم. و آیا این جدول به مراتب ساده‌تر از جدول ضرب نیست؟

واما، جدول واژهٔ «یا» ؟ قبل از همه باید روشن کنیم که منظور از واژهٔ «یا» چیست؟ در زبان عادی روزانه، این رابط ، دو معنای مختلف دارد.

وقتی‌که هاملت،پرسش مشهور خودرامی‌کند: «بودن‌یـانبودن؟» سرآخر، یکی از آنهارا انتخاب‌می‌کند.انتخاب هردوی‌آنها باهم،ممکن نیست-یکی،دیگری را نفی می‌کند؛

«اگر صحرا را به دو نیمه تقسیم‌کنیم، درآنصورت، شیردرایـن نیمه یا نیمهٔ دیگر آن خواهدبود». بـدون تردید، شیر درجایی از صحرا وجوددارد، ولی ممکن است که اودر هردونیمهٔ صحرا باشد (وقتی‌که‌او روی مرز دونیمه خوابیده باشد)،

«یاحرف‌بزن‌یا غذابخور». دوعمل،هرکدام دیگری را نفی‌می‌کند، ولی‌ما مجبور نیستیم‌که غذا بخوریم یا حرف بزنیم؛ لبها ، ممکن‌است عمل به کلی دیگری را انجام دهند، آنها می‌توانند بازنشده باقی‌بمانند

واژهٔ «یا» درریاضیات، اغلب به معنای دیگری بـه کارمی‌رود: گزارهٔ با رابط «یا» را درحالتی درست به‌حساب می‌آوریم کـه دست‌کم یکی ازگزاره‌های تشکیل دهندهٔ آن، درست باشد، ضمناً‌می‌تواند هردوی این‌گزاره‌ها بـا هم درست باشند. به‌این ترتیب، تنها حالتی ازاین‌گزاره نادرست است‌که هر دوگزارهٔ تشکیل دهندهٔ آن نادرست باشد. به ایـن ترتیب، جدول مربوط به عمل « یا » به‌این صورت درمی‌آید:

$\uparrow$ یا $\uparrow$ = $\uparrow$

$\uparrow$ یا $\downarrow$ = $\uparrow$

$\downarrow$ یا $\uparrow$ = $\uparrow$

$\downarrow$ یا $\downarrow$ = $\downarrow$

با دردست داشتن این جدول، می‌توانیم آنرا به‌عنوان تعریف عمل‌منطقی «یا» قبول‌کنیم وازسوءتفاهمهای ناشی ازبیان عادی، رهایی یابیم؛ حالا

دیگر، رابط «یا» را تنها به‌یك معنا می‌فهمیم. وقتی هم که «یا» به‌معنای دوم خود باشد، بازهم می‌توان آنرا دقیقاً تنظیم کرد.

روشن است که دراینجا هم «قانـون محاسبه» وجوددارد. مثلاً، همانطورکه در مورد عمل «و» درست بود، درمورد عمل «یا» هم می‌توان جای دوگزاره را باهم عوض کـرد ، کاملاً همانطور کـه می‌توان جای دوعامل ضرب را عوض کرد.

من در این باره بیشتربحث نمی‌کنم، زیرا در این عملها، تنها دو معنای منطقی وجود دارد ـ درست ونادرست، واین موضوع،کار قضاوت را فوق‌العاده ساده می‌کند.

خیلی جالب است‌که بـه نمونه‌ای از «محاسبه» بپردازیم. به‌یاد می‌آوریم که درضرب توانها، اگر پایه‌ها برابر بود ، نماها رابا هم‌جمع، وبه ایـن ترتیب ، عمل ضرب را تبدیل بـه عمل جمع می‌کـردیم . آیا چنین بستگی مشابهی در مورد عملهای منطقی وجود ندارد؟

مثال را ازرمانهای عادی پلیسی انتخاب می‌کنیم. کوشش می‌کنیم، با توجه به اوضاع واحوال زیر، حقیقت راکشف کنیم. قتلی پیش‌آمده است ودو نفر ـ پتر و پاول، مورد سوءظن هستند.

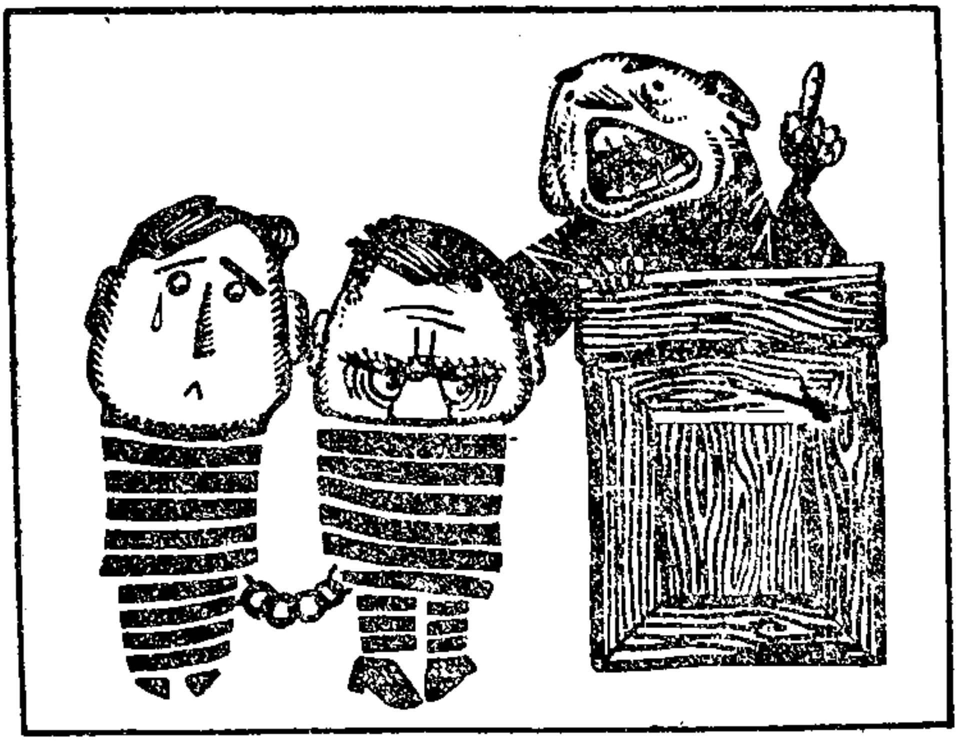
در جریان رسیدگی به قتل ، چهارشاهد فراخوانده شدند . شاهـد اول گفت:

ـ من همینقدر می‌دانم که پتر بیگناه است.

شاهد دوم گفت:

ـ من می‌دانم که بدون شك پاول بیگناه‌است.

شاهد سوم قضاوت کرد:



ـ من می‌دانم که دست کم، یکی از اظهارات قبلی، درست است
شاهد چهارم چنین گفت:
ـ من با اطمینان کامل می‌گویم که شاهد سوم نادرست گفته‌است.
در جریان کار معلوم شد که شاهد چهارم، حق داشته است. چه کسی قاتل است؟

اظهارات شاهدها را به ترتیب، از ردیف آخر، تحلیل می‌کنیم. گزارهٔ چهارم درست است،یعنی سخن شاهد سوم نادرست است. به زبان دیگر، این گزاره درست نیست که دست کم،یکی از دوگزارهٔ اول، درست است. به این ترتیب، حتی یکی از این دوگزاره هم، نمی‌تواند حقیقت داشته باشد، چه گزاره‌ای که پتر را بیگناه می‌داند و چه گزاره‌ای که دربارهٔ بیگناهی پاول، سخن می‌گوید. از اینجا نتیجه می‌شودکه‌هردو شریك جرمند، هردو، قاتل‌اند.

حالا، سعی می‌کنیم هستهٔ منطقی استدلال خود را، جدا کنیم.

ارزش منطقی گزاره‌ها را، مجهول می‌گیریم، زیرا ما از ابتدا نمی‌دانیم که آیا این گزاره‌ها، درست اندیا نادرست. ارزش منطقی اظهارات دوشاهد اول را با x و y نشان می‌دهیم. شاهد سوم می‌گوید که دست‌کم یکی از این دوگزاره درست است، یعنی (از آنجاکه عمل «یا»، درست همین معنای «دست‌کم» را می‌دهد): ، گزارهٔ

x یا y

گزاره‌ای درست است. شاهد چهارم، اینرانفی می‌کند؛ نفی را با نشانهٔ «Γ» مشخص می‌کردیم؛ بنابراین، بنابر اظهار شاهد چهارم، گزارهٔ زیر درست است:

Γ (x یا y)

اگر خوب فکر کنیم، متوجه می‌شویم که گزارهٔ اخیر، دقیقاً این فکر را بیان می‌کند که حقیقت عبارتست از نفی گزارهٔ اول ونفی گزارهٔ دوم، یعنی

Γx و Γy

به‌این ترتیب، بدون اینکه درستی و نادرستی x و y اهمیتی داشته باشد، گزارهٔ

Γ(x یا y)

باگزارهٔ

Γx و Γy

هم ارزش است. همانطور که می‌بینیم، می‌توان از رابط «یا» به رابط «و» رسید وبرعکس.

روشن است که در حالت کلی، برای رسیدن به‌چنین بستگیهایی، به‌هیچوجه نیازی به داستان سرایی نیست. داستان مربوط‌به آدم‌کشی‌را

تنها به‌خاطر این آوردیم که مطلب را روشنتر درك کنیم . این بستگی منطقی را می‌توان کاملاً کلی آزمایش کرد: بـه جای xوy، ارزشهای ممکنهٔ ↑ و ↓ را در نظر می‌گیریم وسپس امتحان می‌کنیم که‌آیا دو گزارهٔ مورد نظرمان، به یك نتیجه می‌رسند یا نه. بایـد چهار حالت را امتحان کنیم:

۱. ارزش x وهم ارزش y عبارتست از ↑ .
۲. x دارای ارزش ↑ ودرهمانحال y دارای ارزش ↓ است.
۳. x دارای ارزش ↓ و درهمانحال y دارای ارزش ↑ است.
۴. هم x و هم y ، ارزش ↓ دارند.

امکان اول را بررسی می‌کنیم. گزارهٔ Γ(x یا y) چه‌معنایی دارد، وقتی‌که هم x وهم y دارای ارزش ↑ هستند؟ ازجدول واژهٔ «یا»نتیجه می‌شود

↑ یا ↑ = ↑

یعنی دراین حالت

x یا y= ↑

وما با گزارهٔ زیر سروکار پیدا می‌کنیم:

Γ ↑

از جدول واژهٔ «نه»بلافاصله معلوم می‌شودکه ارزش این گزاره‌عبارتست از ↓ .

حالا ببینیم ارزش گزارهٔ

Γ x و Γ y

وقتی که xوy ارزش ↑ دارند، چیست؟ داریم:

$$\Gamma x=\Gamma\uparrow=\downarrow, \qquad \Gamma y=\Gamma\uparrow=\downarrow$$

وبنابراین با گزارهٔ زیر سروکار پیدا می‌کنیم:

↓ و ↓

که بنابر جدول واژهٔ «و» ارزش ↓ دارد. به‌همین ترتیب، می‌توان‌ثابت کرد که درسه حالت دیگر هم، دو گزارهٔ مورد نظر، دارای یك ارزش هستند.

اینجا، از جبر هم می‌توان استفاده‌کرد؛ من‌گزاره‌ای فکرمی‌کنم، عملهای منطقی‌گوناگونی دربارهٔ آن به کار می‌برم، سپس اعلام‌می‌کنم گزاره‌ای که به عنوان نتیجه بدست آورده‌ام، درست است‌یا نادرست، واز شما خواهش می‌کنم درستی یا نادرستی‌گزاره‌ای را که ابتدا درنظر گرفته بودم، معلوم کنید. مثلاً این بازی را در نظر بگیرید:

گزاره‌ای در نظر بگیرید، سپس نفی آنرا با رابط «یا» به آن اضافه کنید، بدون اینکه شما چیز دیگری بگویید، من می‌توانم بگویم: گزاره‌ای‌که بدست آورده‌اید، بدون تردید گزاره‌ای درست است.

این مطلب را می‌توان اینطور نوشت: گزاره‌ای راکه‌درنظرگرفته شده است، x می‌گیریم، نفی این گزاره، Γx می‌شود؛ بامربوط کردن این دوگزاره با رابط «یا» به هم، بدست می‌آید:

$$x \text{ یا } \Gamma x$$

مطمئن می‌شویم که ارزش منطقی ایـن گزاره، همیشه برابر است با ↑، بدون توجه به اینکه ارزشx، ↑ باشدیا ↓. این‌مطلب را روشنترمی‌کنیم.

اگر x ارزش ↑ را داشته باشد، بنابر جدول واژهٔ «نه»

$$\Gamma x = \Gamma \uparrow = \downarrow$$

وما باگزارهٔ

↓ یا ↑

سروکار پیدا می‌کنیم، که اگربه جدول واژهٔ «یا» مراجعه کنیم، می‌بینیم که این گزاره در واقع دارای ارزش ↑ است.

اگر x، ارزش ↓ را داشته باشد، بنابر جدول واژهٔ «نه» داریم:

$$\Gamma x = \Gamma \downarrow = \uparrow$$

وبنابراین، به این گزاره می‌رسیم:

↓ یا ↑

وبا مراجعه به جدول «یا»، دوباره ارزش ↑ را بدست می‌آوریم.

به این ترتیب، بـه حقیقت بسیار زیبایی می‌رسیم: گـزاره‌های مرکبی هستند، که بدون توجه به گزاره‌هایی که آنرا تشکیل داده‌اند، همیشه درست هستند. درستی این گزاره‌های مرکب، نه‌تنها به محتوی، بلکه حتی به ارزش منطقی‌گزاره‌های تشکیل دهندهٔ آن هم بستگی‌ندارد. درستی این گزاره‌ها، ناشی از نوع ترکیب منطقی آنست؛ و ما آنها را اتحادهـای منطقی می‌نـامیم. چنین گزاره‌هایی، نقش بسیار اساسی در ریاضیات دارند.

می‌توان این سرگرمی را به این ترتیب هم ادامه دهیم که مثلاً، تنها خود موضوع، مجهول‌باشدنه‌همهٔ‌گزاره. مثلاً: «من عددی پیش‌خود فکر می‌کنم وتایید می‌کنم که‌زوج است. دربارهٔ ایـن گزاره، عملهای مختلفی را به کار می‌برم». گزاره را می‌توان اینطور نوشت:

«x عددی زوج است»

روشن است که درستی یا نادرستی این گزاره مربوط به‌اینست‌که x برابر باچه عددی باشد.

اگـر مثلاً $x = ۴$، در اینصورت، گزاره درست است، ولی اگـر $x = ۷$، گزاره نادرست است. وبه‌این ترتیب، باگزاره‌ای سروکار داریم

که ارزش آن تابعی از x است، ودر ارتباط با اینگونه گزاره‌هاست که به نظریهٔ تابعهای منطقی می‌رسیم.

به همین ترتیب، به‌سادگی می‌توانیم تابعهای منطقی چند متغیره را هم بسازیم: «من سه نقطه درنظر می‌گیرم وحکم می‌کنم کـه آنها بر یك خط راست قراردارند». این گزاره را می‌توان به‌این ترتیب نوشت:

«x ، y و z بریك خط راست قرار دارند»

که ارزش آن، بستگی به‌انتحاب نقطه‌های x ، y و z دارد. اگر سه‌نقطه، به‌این شکل قرار گرفته باشند:



درآنصورت، گزاره درست است، واگر نقطه‌ها به اینصورت باشد:



باگزاره‌ای نادرست سروکارداریم.

لازم به یادآوری نیست که‌این مجهولها را در اینجا نمی‌توان به دلخواه انتخاب کـرد. در مثال اول، باید x را از بین عـددهای طبیعی انتخاب کرد ودرمثال دوم، x،y وz، نقطه‌هایی ازیـك صفحه‌اند. ما، در تابعهای ریاضی‌هم به‌مشابه چنین چیزهایی برخوردکرده بودیم. درآنجا هم لازم بود معین‌کنیم که مجهولها، ازکـدام مجموعهٔ عـددی انتخاب شده‌اند. ایـن مجموعه را، در حالت تابع منطقی، « حوزهٔ فردی » تـابع مفروض گوییم.

وحالا-یعنی دربستگی با تابعهای منطقی ـ زمان «خطر» و «عمل خطرناك» فرارسیده است. مثلاً، یکی ازآنها، واژهٔ «هر» است. اگراین واژه را در مورد نخستین تابع منطقی خود به کاربریم، بدست می‌آید:

«هر x، یك عدد زوج است»

(روشن است که هیچ نیازی بـه تاکید نیست کـه منظورمان از هر x، انتخابی ازمجموعهٔ عددهای‌طبیعی است)؛ اینهم یك‌گزاره است،منتهی، یك گزارهٔ نادرست، زیرا می‌توان مثال مخالفی مثل ۵=x را پیدا کرد که زوج نیست. بنابراین

$\downarrow$ = «هر x، عددی زوج است»

حالا، اگر واژهٔ «وجود دارد» را درمورد تابع خود به‌کاربیریم، به این گزاره می‌رسیم: «x وجود دارد، به نحوی که‌عددی زوج باشد» که گزاره‌ای درست است، یعنی

$\uparrow$ = «x وجود دارد، به نحوی که عددی زوج باشد»

می‌بینیم که‌واژه‌های «هر» و «وجوددارد»هم معرف عملهای‌منطقی هستند، که می‌تـوان آنها را درتابعهای منطقی بـه کاربرد ودر نتیجه، گزاره‌هایی باارزش منطقی معین، بدست آورد.

در مثال ما، ارزش گزاره‌ای که با واژهٔ «هر» آغاز می‌شود برابر است‌با $\downarrow$ بنابراین کاملاً یك‌ارزشی‌است(بدون‌بستگی‌به‌x). ارزش گزاره‌ای هم‌که با واژهٔ «وجود دارد» آغـاز می‌شود، کاملاً یك ارزشی‌و برابـر است با $\uparrow$.

ولی، این‌عملهای جدید، مارا به منطق عامل نامتناهی می‌کشاند. ماحکم می‌کنیم: «فلان خاصیت، برای هر عضو از حوزهٔ فردی، صدق

می‌کند». وقتی که حوزهٔ فردی ، نامتناهی باشد (مثل مجموعهٔ عددهای طبیعی یا مجموعهٔ نقطه‌های یـك صفحه)، رفتار مانسبت بـه بینهایت، چنانست که مثل اینکه به صورت آماده وتمام شده‌ای در اختیارماقرار گرفته است.

می‌گوییم «مقادیری‌از x ،در حوزهٔ نامتناهی فردی ، وجود دارد» مثل اینست که همهٔ حوزه نامتناهی را، بـرای جستجوی x ، در اختیار داریم .

ما، به‌کمك واژهٔ «هر»، گزاره‌هایی را تنظیم می‌کنیم که‌به«مبرم بودن‌بینهایت» مربـوط می‌شود . واژهٔ «وجوددارد» هم «گزاره‌ای صرفاً وجودی» را می‌دهد، یعنی‌تایید وجود چیزهایی راکه نمی شود نشان‌داد.

به این‌ترتیب، عنصرهای ایدآلی در منطق ظاهر می‌شوند، که‌تنها وقتی می‌توانند ادعای حق تابعیت داشته باشند که عدم وجود تناقض درآنها، ثابت شده باشد.

روشن است که گزاره‌های نظریهٔ تابعهای منطقی را هم می‌توان باهمان روش کاملاً دقیقی‌که مثلاً دربارهٔ اتحاد منطقی

$\uparrow = \Gamma x$ یا x

داشتیم، تنظیم‌کرد. برای‌اینکه در موردگزاره‌های منطقی، ازنوع سوء- تفاهمها ونارساییهای ناشی اززبان عادی، پیش نیاید، بهتر است به‌جای به‌کاربردن واژه‌ها، از نشانه‌ها استفاده کنیم، همانطور که درموردواژهٔ «نه» عمل کردیم.

به همین‌ترتیب، ضمن بررسی مساله‌های منطق علامتی (= منطق

صوری) هم از نشانه‌ها استفاده می‌کنند. در نتیجه، همهٔ کارها با زبان بین‌المللی نوشته‌می‌شود، به نحوی که دربسیاری‌ازسطرها، حتی یك واژه‌هم به‌چشم نمی‌خورد. متخصصین‌وریاضیدانان، این ردیف علامتها را، شبیه موسیقیدانانی که از روی دفتر نوتها کارمی‌کنند، ازروی متن می‌خوانند، بدون اینکه توجه کنند که این کتاب در چه‌کشوری چاپ شده است.

لایپنیتس ، کار ساختن زبان علامتی را آغاز کرد و بعد، بسیاری ازدانشمندان‌آنرا پیش بردند وتکمیل کردند، تا بالاخره، هیلبرت وهمکار او برنایس، این زبان را، به‌وسیلهٔ حساس وقابل انعطافی تبدیل کردند که توانست روشهای استدلال ریاضی را چنان خوب ودقیق تنظیم‌کند، که خود این روشها هم به‌عنوان موضوعی از بررسیهای ریاضی درآید.

۲۱. در برابر دیوان داوری فوق ریاضیات

زمان آن فرارسیده‌است که‌شاخه‌ای ازریاضیات را ، که کاملاً محدود ومقید شده است، انتخاب کنیم و ببینیم که آیا ممکن نیست در آن تناقضی پیدا شود.

ما دیگر می‌دانیم که چگونه می‌توان بــه چنین محدودیتی رسید. شرطهای نخستین، یعنی اصل موضوعها را ، انتخاب مــی‌کنیم و فــرض می‌کنیم که‌تمامی این شاخهٔ دانش، ازآنچه که‌درنتیجهٔ این‌اصل‌موضوعها نتیجه می‌شود، تشکیل شده باشد.

نظریهٔ اثبات

اصل موضوعها را می‌توان بــه زبان منطق علامتی نــوشت؛ در

چنین حالتی، تنها بـه صورت دنباله‌ای از نشانه‌هـای منطقی و ریاضی، بدون استفاده از واژه‌ها، درمی‌آیند واین وضع ، از هرگونه سوءتفاهمی که ناشی از واژه‌هاست، جلوگیری می‌کند.

ضمناً باید معنای اینکه «فلان چیز را می‌توان از اصل موضوعها نتیجه گرفت»، به روشنی معلوم شود ، یعنی قانون نتیجه‌گیری را ، بـه روشنی تنظیم کرد.

ما از درستی گزاره‌ای، درستی گزارهٔ دیگری را نتیجه می‌گیریم واین نتیجه را هم‌به‌صورت علامتی می‌نویسیم، بنابراین، همهٔ‌بررسیهای ما، به‌اینجا منجر می‌شودکه باعبور از یك ردیف علامتها ،ردیف‌دیگری از علامتها را مطالعه کنیم. به یاد بیاوریم که معادله‌ها را چگونـه حل می‌کنیم، روند حل معادله‌هاهم،براساس چنین‌گامهایی‌است. مثلاً ازاین ردیف علامتها

$$\frac{۵X}{۲}+۳=۱۸$$

به این ردیف علامتها می‌رسیم:

$$\frac{۵X}{۲}=۱۵$$

حق چنین‌عبوری‌را، بعداز استدلال ساده‌ای‌بدست می‌آوریم: اگرکمیتی، بعد ازاضافه شدن۳ واحد، برابر ۱۸ شده است، بنابراین، خود آن‌کمیت باید برابر ۱۵ باشد.

باوجود این، ما بعداً متقاعد می‌شویم کـه این دو ردیف علامت تنها از نظر صورت باهم متفاوتند ؛ درسمت چپ ردیف اول، علامت۳ وجوددارد،که درردیف دوم ازبین رفته است، درضمن‌عددی که‌درسمت

راست ردیف دوم‌قرار گرفته است، ۳ واحدکمترازعدد سمت راست‌ردیف اول‌است. به‌این‌ترتیب بودکه ماتوانستیم قانونی کاملاً صوری رابپذیریم که بنابر آن، هرجمله را ازیکطرف معادله، باتغییر علامت، به‌طرف‌دیگر معادله ببریم. وقتی‌که این قانون را پذیرفتیم، دیگر ضمن استفادهٔ ازآن مطلقاً به مفهوم‌آن توجهی نمی‌کنیم: به این ترتیب، قانون نتیجه‌گیری خودبه خود به‌صورت مکانیکی «قانون بازی» درمی‌آید: بعضی نشانه‌ها را می‌توان ، با جزئی تغییر ، از یکجا، به‌جای دیگری برد. واین،بازی شطرنج را به یاد می‌آورد: شاه شطرنج می‌تواند ازیك خانه، به هرجهتی حرکت‌کند.

درموردنتیجه‌گیری از اصل موضوعها هم،به‌همین ترتیب‌می‌توان عمل‌کرد: ابتدا معلوم می‌کنیم‌که کدام تغییر صوری درردیف علامتها،با نتیجه‌گیری مفروض ما، متناظراست وسپس این تغییر صوری را انجام می‌دهیم، بدون اینکه هربار به محتوی درونی این تغییر ، به طور جدی توجه‌کنیم.

حالا دیگر می‌توانیم به کلی فراموش‌کنیم‌که دراین شاخهٔ دانش، ازچه چیزی گفتگو می‌شود؛ و می‌توانیم بگوییم : ردیفی از علامتهای کاملاً معین(که‌آنها را، اصل‌موضوع‌می‌نامیم)،وهمراه‌باآنها،قانونهای معین بازی را دراختیار داریم، که به‌کمك‌آنها می‌توانیم از ردیف داده شده، به ردیف دیگری از علامتها برسیم . این قانونها را ، قانونهای استنتاج می‌نامیم.

به‌این ترتیب، دستگاه‌گزاره‌ها واستدلالها، به‌وسیلهٔ ریاضیدانان، به‌چنان ماده‌ای‌تبدیل می‌شود که همچون عدد، دردسترس وقابل‌انعطاف

است.به‌این ترتیب، وباچنین روش‌نظری است‌که می‌توانیم از روشهای تجربی بررسیهای ریاضی استفاده کنیم .

ولی از این روشها ، نمی‌توان به‌طورمکانیکی، و با دنبال کردن قانون بازی، استفاده‌کرد. درهرگام، بایدکاملاً قانع شدکه چنین‌گامی رامی‌توان‌برداشت‌وقضاوت ما، منجر به‌عنصر ناراحت‌کننده وخطرناکی نمی‌شود. حتی برای یك لحظه‌هم نباید هدف اصلی رافراموش‌کرد: ما می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که دررشتهٔ مفروضی ازدانش می‌توان ازعنصرهای بینهایت استفاده‌کرد؛ چنین‌استدلالی،وقتی‌که‌منجربه‌استفاده‌ازعنصرهای خطرناك می‌شود، به‌هیچگونه موفقیتی‌نمی‌انجامد. روش ووسیلهٔاستدلال باید چنان محکم وقاطع باشد که‌حتی انتقادی‌ترین دیدگاههای شهودیها هم نتواند، لطمه‌ای به‌آن واردکند.

فوق‌ریاضیات

بـه این ترتیب، همانطور که ریاضیات تقسیم می‌شود وشاخه‌های تازه‌ای ازآن سردر مـی‌آورد : از یکطرف دستگاههای‌کامـلاً قالبی و دستورالعملهای‌صوری داریم، که‌به‌جای قانونهای استنتاج‌کارمی‌کنند؛ واز طرف دیگر یك فوق ریاضیات داریم‌که درآن، بادقت تمام، معنای هرگامی که برداشته می‌شود بررسی می‌شود ومعلوم می‌کنند که درکجابا استنتاجهای بی‌خدشه وکاملاً بی‌خطر، سروکار داریم. در اینجا ، همهٔ دستگاههای ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرد واساسی‌ترین موضوع‌آن، اثبات بی‌تناقضی یك نظریهٔ مفروض است.

معلوم شد که اگر بخواهیم روشن‌کنیم که‌آیااستفادهٔازقانـونهای بازی، ما را به تناقض نمی‌کشاند، باید محتوی گزاره‌ها را تحلیل‌کنیم.

باید از روی محتوی، ونه صورت ظاهر گزاره، قضاوت‌کنیم که‌آیامی‌تواند شامل تناقضی باشد یا نه!

برای اینکه بتوانیم از این نگرانی نجات پیدا کنیم، کافی است که تنها به یك مورد تناقض اکتفا کنیم؛ مثلاً اگر عددهای طبیعی در تشکیل دستگاهی به‌این صورت واردشوند:

۱ = ۲

جنبهٔ این دنبالهٔ سادهٔ علامتها را می‌توان به‌کمك ساختمان آن ، کاملاً مشخص کرد. توجه می‌کنیم‌که وجود علامت « = » وسپس رقم ۲ ، بعد از رقم ۱، به معنای تناقض است. هیچ چیز بیشتری برای ما لازم‌نیست. قضاوت شوخی‌آمیزی وجود دارد که‌بنابرآن می‌توان ثابت کرد ۲ = ۱، ودر اینصورت می‌توان‌گفت‌که‌ازهر گزارهٔ متناقضی، که وارد ذهن‌شود، می‌توان هرچیزی، ومثلاً ۲ = ۱ را نتیجه گـرفت . بنابراین کافی است ثابت شود کـه دردستگاه مفروض، ممکن نیست دستور ۲ = ۱ را نتیجه گرفت . با این اثبات، می‌توانیم اطمینان داشته باشیم که درنظریهٔ ما ، هیچگونه تناقضی، وجود ندارد.

به‌این‌ترتیب، گزاره‌های فوق ریاضیات براین اساس تنظیم‌شده‌اند که ثابت کنیم با شروع از دنبالهٔ علامتها، که اصل موضوع نامیده‌می‌شوند، واستفاده از قانونهایی کـه برای بازی در نظر گرفته شده است ، نمی‌توان به دنبالهٔ علامتهای به صورت ۲ = ۱ رسید.

خود هیلبرت، درمورد بعضی‌مثالهای ساده، این عدم‌تناقض راثابت کردو کسانی که‌ازمکتب‌اوپیروی‌می‌کردند، این روش رابرای‌دستگاههای پیچیده‌تری هم به‌کاربردند. به این ترتیب، به‌تدریج، امکاناتی که برای

بررسی یك دانش بزرگ و وسیع لازم بود، فراهم شد. طبیعی است که پیش از همه، به‌فکر دانش عددهای طبیعی، یاحساب، بیفتند. همه‌معتقد بودند که برای به‌کار گرفتن اندیشهٔ اثبات هیلبرتی در مورد حساب و پیداکردن پیچها ومفهومهایی که امکان‌لغزش‌درآنها وجود دارد، نیروی زیادی نمی‌خواهد.

وناگهان«نظریهٔ اثبات هیلبرت»ـاین رشتهٔ تازهٔ دانش، که‌اینقدر ظریف وبا احتیاط ساخته شده بود ـ به‌طور جدی به‌لرزه درآمد.

اثبات بی‌تناقضی حساب

گودل، ریاضیدان جوان، با به‌کاربردن همین روشهای‌نظریهٔ‌اثبات کشف کردکه اگربخواهیم خود را به‌مفهومها ووسیله‌هایی که درچارچوب دستگاه مورد بحث‌قرار دارند، محدودکنیم،نمی‌توانیم بی‌تناقضی حساب را ثابت کنیم.

کوشش می‌کنیم ایـن مطلب را بهتر بفهمیم: فوق ریاضیات از وسیله‌های صوری استفاده نمی‌کند ، زیرا درآنجا همیشه باید بدانیم که چه می‌کنیم. نتیجه‌گیریهای آن، بایدآگاهانه باشد، نه مکانیکی. ولی، این دست‌کم به‌این معنانیست که مانمی‌توانستیم از نتیجه‌گیریهای‌فوق ریاضیات، درقانونهای مکانیکی بازیها، استفاده کنیم. روشن است که اگر می‌خواستیم‌با فوق ریاضیات،بدون توجه به‌هدف خاص آن،مشغول باشیم، می‌توانستیم به‌این کاربپردازیم. این بـه‌خودی خود روشن است که‌اگرفوق‌ریاضیات را فرموله می‌کردیم‌وبه‌شکل صوری درمی‌آوردیم، به‌خاطر احتیاطهای مربوط به‌آن وفرار ازهمهٔ عنصرهای‌خطرناك‌ممکنه‌در روشهای نتیجه‌گیری، حوزهٔ عمل‌آن، نسبت به‌حوزهٔ نظریه باعنصرهای

بینهایت آن، خیلی تنگتر می‌شد. وضمناً، نتیجهٔ گودل تایید می‌کند که اثبات بی‌تناقضی را تنها وقتی می‌توان انجام داد که از وسیله‌هایی که بیرون از مرزهای دستگاه مورد بررسی‌است، استفاده‌کنیم.

وچه کسی این عذر عنصرهای خطرناك را می‌پذیرد که از میان انبوه وسیله‌هایی‌که در مخزن وجوددارد، وسیله‌هایی راکه‌برای دستگاه مورد بررسی لازم است، جدا می‌کند؟

به‌نظرمی‌رسدکه‌این‌پایان ورشکستگی‌نظریهٔ‌اثبات‌است‌که‌هیچگونه امیدی را، برای رهایی از آن، باقی نگذاشته است.

ولی، هیلبرت ، حتی برای لحظه‌ای هم ، دچار هراس نشد. او اطمینان داشت که بالاخره می‌توان راه خروجی پیداکرد. باید روشهایی برای‌نتیجه‌گیری وجودداشته باشدکه، با وجودی که از مرزهای دستگاه موردبررسی‌ما خارج می‌شود ، بتواند بر مبانی‌محدودعقل‌محدودما،تکیه کند، به‌نحوی‌که برای شهودیان هم قابل قبول باشد.

وسرآخر، جستجوها به نتیجه رسید و چنین روشهایی پیدا شد. هنتسن،شاگردهیلبرت، ابزار فوق ریاضیات را بدست آورد،که اغلب‌آنرا استقراء نامتناهی می‌نامند. وبه این ترتیب ، بی تناقضی تمامی حساب ، ثابت شد.

گلهٔ عددهای طبیعی می‌تواند به‌آرامی به‌چرا مشغول باشد: گرگی در میان آنها وجود ندارد.

«استقراء نامتناهی» ـ نامی مهیب وترسناك است! با وجود این ، اندیشهٔ بسیار ساده وبی‌آزاری‌درآن نهفته است.

اگر ازیك عضو دلخواهی‌که درجای دوری از رشتهٔ طبیعی‌عددها

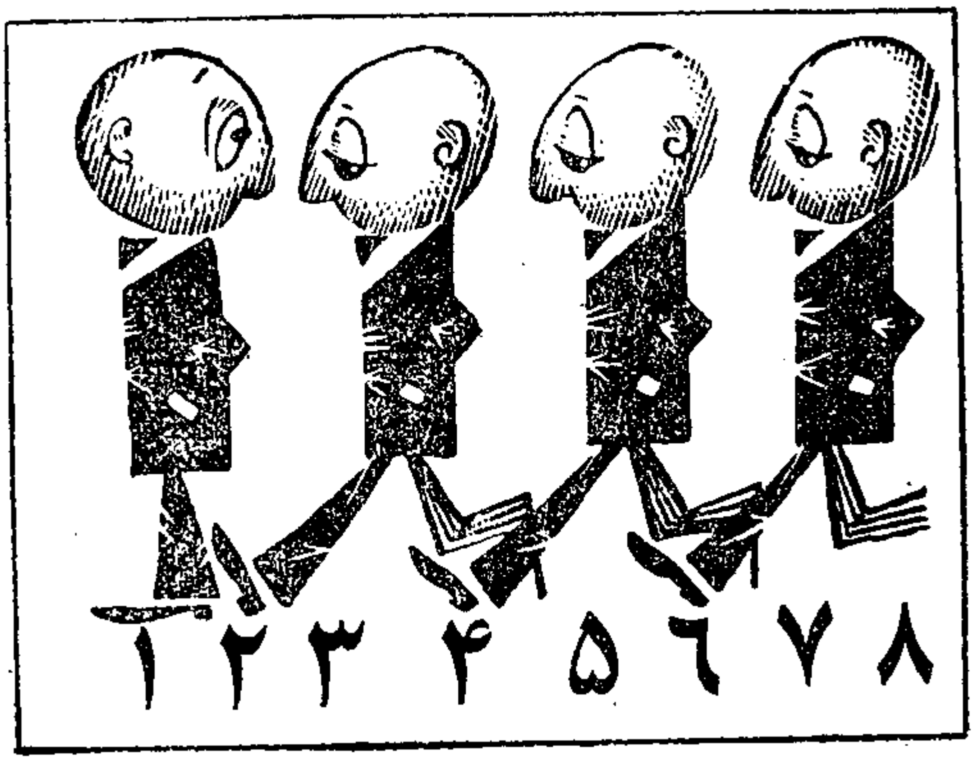
۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ...

قرار گرفته است، آغاز کنیم و با گامهایی که مقدار آنها به دلخواه انتخاب شده است، به عقب برگردیم، بدون تردید، جز تعداد محدودی گام نمی‌توانیم برداریم. اگر مثلاً از یك ملیون آغار کنیم، و برای اندازهٔ هر گامی که به عقب برمی‌داریم، واحد را در نظر بگیریم، روشن است کـه بعد از یك ملیون گام، به عدد ۱ می‌رسیم.

حالا، رشتهٔ طبیعی عددها را، مثلاً، به‌این‌ترتیب، منظم می‌کنیم: ابتدا، همهٔ عدده‌ای فردرا انتخاب می‌کنیم، وسپس، وقتی که ازمجموعهٔ نامتناهی عددهای فرد فراغت پیدا کردیم، به عددهای زوج می‌پردازیم:

۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ... ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ...

اگر با این نظم، از عددی، به عقب، یعنی به طرف چپ ، برگردیم، بعد



از برداشتن گامهایی، دیر یازود، راهمان به پایان می‌رسد. زیرا، اگراز يك عدد فرد آغاز کرده باشیم، کاملاً شبیه حالتی که بارشتهٔ عددهای طبیعی سروکارداشتیم، بعد از تعداد محدودی گام، بـه واحد می‌رسیم . اگر هم، از عددی زوج آغازکنیم، باهمان روش، معلوم می‌شود که‌بعد از تعدادی گام (کم یازیاد)، عددهای زوج تمام می‌شودو به عددی فرد۔ هرقدر که می‌خواهد بزرگ باشد ـ می‌رسیم. به‌این ترتیب، به مرزهای دنباله‌ای می رسیم که ساختمان آن شبیه ساختمان رشتهٔ عددهای طبیعی است.

روشن است که عددهای طبیعی را ، باروشهای مختلفی می‌تـوان منظم‌کرد. مثلاً ، می‌توان رشتهٔعددهای طبیعی رابه سه‌گروه تقسیم‌کرد: درگروه اول‌عددهای بخش پذیر بر۳، در گروه دوم عددهایی‌که يك‌واحد از عددهای گروه اول بیشترند، وبالاخره درگروه سوم عددهایی کـه ۲ واحد از عددهای‌گروه اول بیشترند (ضمناً عدد صفر راهم به‌آنهااضافه می‌کنیم) :

۰،۳،۶،۹، ... ۱،۴،۷،۱۰، ... ۲،۵،۸،۱۱، ...

اگر، از عددی درگروه سوم آغازکنیم و بـه سمت چپ بیاییم، بعد از برداشتن تعداد محدودی گام، به‌گروه دوم می‌رسیم که دراینصورت، با موقعیتی کاملاً شبیه مثال قبل، سروکار پیدا می‌کنیم .

ما حتی می‌توانیم بینهایت گروه بدست آوریم ، مثلاً به ایـن ترتیب که‌درگروه اول، عددهای فرد راقراردهیم؛ درگروه دوم، عددهایی که تنهابر۲ بخش پذیرند؛درگروه سوم، عددهای بخش پذیر بر$۴=۲^۲$؛ درگروه چهارم، عددهای بخش پذیربر $۸=۲^۳$ وغیره:

۱،۳،۵،۷،... ۲،۶،۱۰،۱۴،... ۴،۱۲،۲۰،۲۸،... ۸،۲۴،۴۰،۵۶،...

بینهایت بودن تعداد گروهها ، نباید ما را بترساند : اگر از عدد کاملاً مشخصی آغاز کنیم، این عدد دریکی از گروهها قراردارد و پیش از آن گروه هم، مسلماً تعداد محدودی گروه وجوددارد.

ازهمهٔ‌این‌مثالها‌روشن‌می‌شود‌که،ضمن‌حرکت‌به‌عقب، از‌ترکیبهای پیچیده‌تر، به‌ترکیبهایی‌می‌رسیم که کمترپیچیده‌است. ضمناً معلوم‌است که اگر از ترتیب پیچیده‌ای از عددهای طبیعی آغازکنیم و بـه طرف عقب بیاییم،بعد ازبرداشتن‌تعدادمحدودی‌گام، باید به‌رشتهٔ عادی‌طبیعی‌برسیم.

هیلبرت هم در اثبات خود، از همین حقیقت استفاده می‌کند کـه اگر با نظم معینی سروکار داشته باشیم(که‌البته ، او این نظم را خیلی پیچیده‌تر ازمثالهای ما درنظرگرفته است)، می‌توان‌تنها تعداد محدودی گام به عقب برداشت. وچنین حقیقتی را، می‌توانیم، بدون ناراحتی؛ با درك محدود و مشخص خود «هضم کنیم»، در حالیکه، این حقیقت ، از مرزهای دستگاه مورد بررسی ما، بیرون رفته است.

به چه‌ترتیب می‌توان ازاین نتیجه،برای اثبات بی‌تناقضی استفاده کرد؟

همیشه، برای اثبات بی تناقضی، باید چنین مسیرفکری‌راپیمود . فرض‌کنیدکسی ادعا کند که توانسته است باتکیه براصل موضوعهای دستگاه به حکمی متناقض برسد. این شخص اثباتی را ارائه می‌دهد که گویا باتکیه براصل موضوعها، واستناد به‌قانونهای‌نتیجه‌گیری،توانسته است رابطهٔ ۲ = ۱ را نتیجه بگیرد. ما هم می‌خواهیم ثابت کنیم کـه در درون این اثبات ، اشتباهی وجود دارد وتلاش می‌کنیم که آنرا پیدا

کنیم .

اگر در تصور ما، نسبت به قضاوتی که در بارهٔ اثبات می‌کنیم ، عنصر خطرناك وجود نداشته باشد ، طبیعی است که باید بتوانیم اشتباه را پیدا کنیم. وقتی که از حکمهای درست آغاز و بـه قانونهای مسلم نتیجه‌گیری تکیه‌کنیم ، تنها زمانی می‌تـوان به نتیجهٔ نادرست ۲ = ۱ رسید که درجایی اشتباه شده باشد.

ولی اگر ضمن اثبات، ازعنصر بینهایت استفاده شده باشد،نمی‌توانیم مطمئن باشیم که بتوانیم این اشتباه را پیداکنیم، زیـرا ، ممکن است سرچشمهٔ تناقض، در زیر همین عنصر بینهایت پنهان شده باشد.

ولی، نتیجه‌ای که از راه این استدلال بدست آمده است ، خیلی معصوم وفروتن به نظر می‌رسد: ۲ = ۱. دراینجا، هیچ ردپایی از مفهوم «فوق محدود» وجود ندارد. وبنابرایـن ، اگر چنین مفهومی، در جریان اثبات واردشده بـاشد (بنابر خاصیت عنصرهای ایده‌آلی)، باید درجایی ظاهر وسپس، بعداز آنکه نقش خود را بازی کرده است، دوباره از نظر دور شده باشد. آیا نمی‌شود اثبات را، بدون یاری آن، انجام داد؟

مثلا، بسیاری از تابعهای مثلثاتی را می‌توان ، هم به‌کمك واحد موهومی i وهم بدون استفاده از آن، توضیح داد.

حقیقت اینست که اگر تنها بایك عنصر خطرناك، یا با چند عنصر خطرناکی که به هم بستگی ندارد،سروکار داشته باشیم، چنین امکانـی وجوددارد. هیلبرت ثابت کرد که چنین اثباتهایی را می‌توان به اثباتهای کاملاً بیخطر تبدیل وبه سرعت، اشتباه را پیداکرد.

باوجوداین، عنصرهای ایده‌آلی، که موجوداتی نامحسوس‌وخیالی

هستندواستعداد اینرا دارند که در هم فرووروند، نسبت به هم بستگیهای بغرنجی‌دارند؛وبه همین‌مناسبت،خیلی ساده‌نمی‌توان عنصرهای بینهایت را از اثباتهای درهم‌و پیچیده دور کرد.

از اینجاست که کشف هنتس‌ن اهمیت پیدا می‌کند؛ اومتذکر می‌شود که‌بین مرحله‌های پیچیدگی اثبات وتنظیمهای بغرنج مجموعهٔ عددهای طبیعی، شباهتی وجوددارد. وقتی‌که‌برای چنین اثبات پیچیده‌ای‌ازروش هیلبرت استفاده می‌کنیم،حتی اگرعنصرهای‌بینهایت راکنارنزنیم،دست کم به‌اثباتی‌که درجهٔبغرنجی آن‌متناظربابغرنجی‌کمتری،نسبت به‌تنظیم مجموعهٔ عددهای طبیعی باشد، دست می‌یابیم. به‌همین ترتیب، وقتی‌که ازروش هیلبرت به دفعات استفاده‌کنیم، درجهٔ بغرنجی اثبات مرتباً‌کمتر می‌شود.بنابراین، ضمن عبور از تنظیمهای مجموعهٔ عددهای طبیعی، که مرتباً بغرنجی آنها کمتر می‌شود، سرآخر، بابرداشتن‌گامهای محدودی، به دنباله‌ای ، بدون هیچگونه پیچیدگی می‌رسیم . در نتیجه ، با استفاده از اندیشه هیلبرت به تعداد محدود، به اثباتی می‌رسیم که از هرگونه پیچیدگی به دوراست، اثباتی که درآن‌عنصرهای بینهایت‌وجود ندارد وبه‌سادگی می‌توان اشتباه را درآن پیدا کرد.

این، یك استدلال ریاضی خالص وبسیار ظریف است، ونتیجه‌ای که‌بدست می‌آید، اهمیت فوق‌العاده‌دارد. ما دوباره اعتماد خود را به روشهای قدیمی، ودست‌کم به حساب، بازیافتیم.

بسیاری از ریاضیدانان ـ از آنهاکه حاضر نبودند دربارهٔخطرها چیزی بشنوند ـ صرفنظر از هرچیز، به نظریهٔ اثبات با سوءظن نگاه‌می‌کردند وآنرابیشتر یك نظریهٔ فلسفی‌به‌حساب‌می‌آوردند تا ریاضی. آنها،

تنها وقتی فکرمربوط به‌وجود این شاخهٔ ریاضیات را پذیرفتند که‌نظریهٔ تازه، توانست درشاخه‌های دیگری از ریاضیات هم به‌کاررود. هیلبرت، برای نشان دادن این امکان نظریهٔ اثبات، فکر به‌کار بردن روشهای‌آنرا دریکی از بزرگترین مساله‌های کهنهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها ، یعنی فرضیهٔ متصله، طرح کرد.

فرضیهٔ متصله

گفتگو بر سراین مساله است: درمجموعهٔ عددهای طبیعی ، وقتی برحسب مقادیرشان منظم شده باشد، نظم کاملی حکومت می‌کند. برای هرعدد، عدد دیگری وجود دارد که بلافاصله بعداز آن قرارگرفته است: بعد از۲، عدد ۳ وبعداز ۱۲، عدد۱۳ می‌آید. درمجموعهٔ عددهای‌کسری وضع دیگری حاکم است. بین هردوکسر، هرقدر هم‌که به‌یکدیگر نزدیك باشند، بازهم کسرهای دیگری پیدا می‌شود. وقتی‌که بامجموعهٔ‌عددهای حقیقی‌سروکارداشته‌باشیم، این‌پدیده، به‌وضع روشنتری‌به‌چشم‌می‌خورد: این عددها، روی خط عددی به‌صورت پیوسته قرار گرفته‌اند ودقیقاً هر کدام به‌دیگری چسبیده است. به همین مناسبت است که قوت عددهای حقیقی را، قوت متصله نامیده‌اند (یعنی حرکت‌عددهای‌حقیقی، یك‌حرکت پیوسته است).

در زمینهٔ قوتهای نامتناهی، که به وسیلهٔ کانتور مطرح شد ، این پرسش پیش می‌آید: آیا برای هرقوتی، قوت بلافاصله بعد از آن‌وجود دارد؟ پاسخ مثبت است. ازاین دیدگاه، قوتهای نامتناهی هم،حرکتی مثل‌عددهای طبیعی دارند. کمترین قوت‌نامتناهی،مربوط‌به قوت‌مجموعهٔ عددهای‌طبیعی است. به‌این پرسش، باید پاسخ داد: کدام قوت، بلافاصله

بعداز این‌قوت قراردارد؟ مامی‌دانیم که‌قوت متصله، یعنی قوت‌مجموعهٔ عددهای حقیقی، بیشتر از قوت مجموعهٔ عددهای‌طبیعی‌است. باوجوداین باید روشن کرد که آیا این دوقوت دقیقاً پشت سرهم قرار گرفته‌انـد، یا اینکه‌بین‌آنها، قوت‌دیگری هم‌وجود دارد. دربارهٔاین مسأله، بررسیهای خیلی زیـادی انجام گرفته است. کم‌کم، میان ریاضیدانان ایـن فرض مورد قبول قرار گرفت که قوت متصله، بلافاصله بعد از قوت عددهای طبیعی قرارگرفته است. همین فرض، مساله‌ای را تشکیل می‌دهد که ما آنرا «فرضیهٔ متصله» نامیدیم، آنهایی که به درستی آن اطمینان‌بیشتری دارند، آنرا «قضیهٔ متصله» هم‌گفته‌اند، باوجود این، تامدتها نتوانستند این مساله راحل‌کنند.

بعدها، گودل باتکیه براندیشهٔ هیلبرت وبا استفاده ازروشهای‌نظریهٔ اثبات، ثابت کرد که قبول درستی قرضیهٔ متصله، منجربه هیچ تناقضی در نظریهٔ مجموعه‌ها، نمی‌شود. بنابراین، اعم از اینکه فرضیهٔ متصله، به‌دیگر اصل موضوعهای نظریهٔ مجموعه‌ها مربوط باشد یا نباشد، در هر حالت، ماحق داریم از آن دراثباتهای خود استفاده کنیم، زیرا ما رابه هیچ‌تناقضی‌نمی‌رساند. دراینجا، روش اثبات، به‌روش اثبات بی‌تناقضی هندسهٔ هذلولی شباهت دارد. گودل، مدل‌نظریهٔ مجموعه‌ها را ساخت. در این مدل، هم‌ازاصل موضوعهای نظریهٔ‌مجموعه‌ها، وهم از فرضیهٔ‌متصله، استفاده‌شده‌است.

می‌بینیم که هیلبرت‌کاملاً حق داشت به‌کسانی که نسبت به‌نظریهٔ اثبات تردید داشتند، بگوید: «به ثمره‌ای که خواهد داد، همهٔ شماگردن خواهیدگذاشت».

ضمیمه‌ای دربارهٔ برگشت به‌نامتناهی

به‌این ترتیب، بی تناقضی دانش عـددهـای طبیعی، مسلم وخلل ناپذیر است. از همین روش ، بااندك تفاوتی، می‌تـوان‌برای اثبات بـی تناقضی‌دیگرمجموعه‌های عددی هم،استفاده‌کرد. مجموعهٔ عددهای‌مثبت ومنفی، مجموعهٔ عددهای کسری وبه‌طور کلی مجموعهٔ عددهای گویا. تنها، این باقی می‌ماندکه مجموعهٔ عددهای حقیقی را هم بررسی کنیم. ولی، دراینجا، با دشواریهای تازه‌ای روبرو می‌شویم.

ما،عددهای‌گنگ را با تقریب بدست می‌آوریم وکوشش می‌کنیم با قرار دادن این عدد درفاصله‌هایی‌که مرتباً تنگتر وتنگتر می‌شود ، به تقریب بهتری برسیم. به‌این ترتیب، در اینجا دیگر به جای حساب ، با آنالیزسروکارداریم. دراینجا، همیشه‌بایك‌حرکت وروندنامتناهی‌برخورد می‌کنیم وبنابراین، عنصرهای خطرناك به‌صورت تازه‌ای پدیدارمی‌شوند.

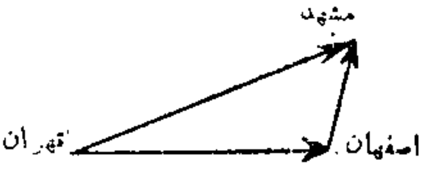
اصل موضوعی کردن آنالیز

وقتی‌که در این‌کتاب، برای نخستین بار ، با این پرسشها روبرو شدیم، مدتی فکر کردیم که‌چگونه می‌توانیم بیان آنالیز را، کـه شامل عنصرهای خطرناك و غیرعادی است، دقیقتر بدهیم، بیانی که موجودیت آنالیز، به‌آن‌بستگی دارد. این‌بیان حاکی است: «تصور مانشان می‌دهد ضمن‌تشکیل رشتهٔ نامتناهی‌حدها، وقتی‌که هرکدام از این حدها درداخل حدهای قبلی‌قرارگرفته است، باید چیزی وجود داشته باشد، به‌نحوی‌که قسمت مشترك آنها، به‌سمت آن متقارب باشد».

ولی، به‌چه‌ترتیبی می‌توان تصور مربوط به‌این روند نامتناهی‌را نشان داد؟ آیا فراموش کرده‌ایم که نمی‌شود آنچه راکه از دنیای‌متناهی بدست آورده‌ایم ، درمورد نمودهای نامتناهی بـه‌کاربرد؟ می‌توان مثال

تازه‌ای پیداکرد که ما را به‌طور جدی به‌فکر وادارد.

لازم نیست کسی ریاضیدان باشد تا به این نکته توجه کند که کوتاهترین‌فاصلهٔ‌بین دونقطه، خط راست است. کسی‌که بخواهد ازتهران به‌مشهد پروازکند، اگرراه راست را انتخاب کند خیلی زودتربه مقصد

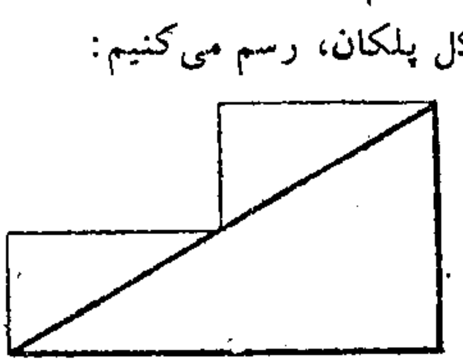


می‌رسد تا مثلاً از راه اصفهان دور بزند.

ازاینجامی‌توان‌به‌این نتیجه رسیدکه مجموع طولهای‌دوضلع‌مثلث از طول ضلع سوم آن بزرگتر است.

وحالا علی‌رغم‌همهٔ اینها «ثابت‌می‌کنیم»که درمثلث قائم‌الزاویه، مجموع دوضلع مجاور به زاویهٔ قائمه، برابر است با وتر. روشن است که این یك نتیجهٔ احمقانه‌ایست؛ باوجود این، ما با استفاده از تصوری که دربارهٔ روند نامتناهی داریم، به چنین نتیجه‌ای خواهیم رسید.

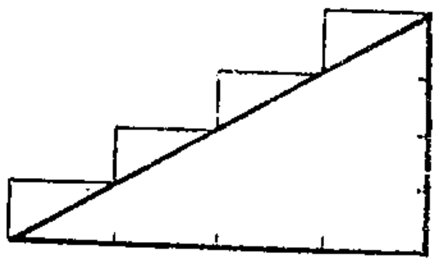
روی وترمثلث قائم‌الزاویه، پاره‌خطهایی موازی‌ضلعهای‌مجاوربه زاویهٔ قائمه، وبه‌شکل پلکان، رسم می‌کنیم:



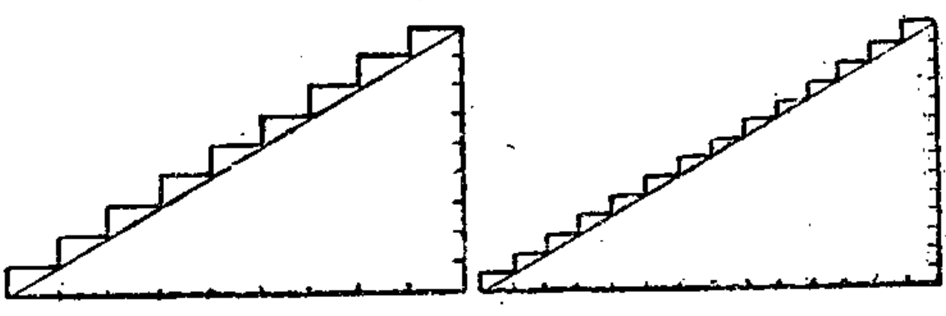
روشن است که مجموع دوپاره خط قائم برابر با ضلع‌قائم، ومجموع‌دو پاره خط افقی، برابر با ضلع افقی است. بنابراین، طول تمام خط شکسته

پلکانی، برابر با مجموع طولهای دوضلع مجاور به زاویهٔ قائمه‌می‌شود.

اگر خط شکسته را با چهار پله رسم کنیم، باز هم به همین‌نتیجه می‌رسیم:



دوباره، مجموع پاره‌خطهای افقی، طولی‌برابرضلع افقی‌مجاوربه‌زاویهٔ‌قائمه ومجموع پاره‌خطهای قائم، طولی برابر طول ضلع قائم مجاور به‌زاویهٔ قائمه می‌دهند. اگر هربار تعداد پله‌ها را زیادکنیم:



به‌نظر می‌رسدکه‌همیشه، مجموع طول‌پارخطهای پلکان، برابر بامجموع طولهای دوضلع‌مجاوربه‌زاویهٔ‌قائمه می‌شود. ازطرف دیگر، خط‌پلکانی، مرتباً به و تر مثلث نزدیك می‌شود و «الهام» به ما تلقین می‌کند» که اگر تعداد پله‌ها به سمت بینهایت میل‌کند، پلکان روی وتر می‌خوابد. واز اینجا نتیجه می‌شودکه‌طول وتر با مجموع طولهای دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه، برابراست.

حالا می‌توانیم در این باره بیندیشیم که آیـا حق‌داریم از تصور

الهامی خود برای بررسیهای بینهایت استفاده کنیم.

وسخن برسر بودن یا نبودن آنالیزاست. آیا آنرا ، بدون هیچ مبنایی قبول کنیم، تنها به‌این خاطرکه می‌خواهیم باور کنیم. آیاهیچ تلاشی برای نجات آن به‌کمك روشهای نظریهٔ اثبات نکنیم، و آیاقبول این حکم، منجر به تناقض نمی‌شود؟

به‌این ترتیب، دردستگاه اصلهای‌آنالیز، عنصرهای‌نامتناهی‌تازه‌ای پیدا می‌شود. اگرماباقبول آنها موافقت‌کنیم، دستگاه چنان وسیع می‌شود که درآن می‌توان روشهای مورد استفادهٔ هنتسن، حتی نمونه‌های پیچیده‌تری از استقراء بینهایت را به کار برد. در اینجاست‌که دوباره صدای قضیهٔ گودل، به روشنی شنیده می‌شود که بی‌تناقضی دستگاه را نمی‌توان به کمك روشهایی که‌در بررسی خود دستگاه بدست می‌آید، ثابت‌کرد. بنابراین، هیچ امیدی به‌این‌موضوع نمی‌توان‌داشت که‌روشهای قدیمی برای اثبات بی تناقضی آنالیز ، کافی باشد. برای رسیدن به این مقصود، باید روشهای تازه‌ای، که‌طبعاً پیچیده‌تر هم هستند، پیداکرد. و این، میدانی است که درزمان ما، برای تحقیق وجستجو، بازاست.

۲۲. آنچه که از ریاضیات برنمی‌آید

اثبات بی‌تناقضی حساب، علاوه بر چیزهای دیگر، نارسایی اصل موضوعی کردن را هم نشان داد. روش استقراء نامتناهی را، که‌دراین اثبات مورد استفادهٔ مابود، می‌شود به‌زبان عددهای طبیعی تنظیم‌کرد، و آنرا هم به نوبهٔ خودمی‌توان به‌صورت‌تصوری«متناهی» درنظرگرفت. با وجود این ، این روش در بیرون از مرزهای دستگاه اصل موضوعهای

مربوط به‌دانش عددهای طبیعی، قرار دارد.

این وضع ، به‌هیچوجه‌تصادفی نیست . هیچ دستگاهی از اصل موضوعها: قادر نیست همهٔ آنچه را که می‌خواهد، دربربگیرد. همیشه ، چیزهایی وجوددارد که می‌لغزد و از درون این دستگاه در می‌رود ؛ از طرف دیگر،چیزهایی هم‌وجوددارد که بدون دعوت‌ما،به‌این دستگاه‌وارد می‌شود. دستگاه اصل‌موضوعها، به خیلی‌چیزها متوسل می‌شودوبنابراین، طبیعی است که‌چیزهایی را هم از دست بدهد.

این مطلب را که‌دستگاه اصل موضوعها ، به خیلی چیزها دست می‌اندازد، به‌وسیلهٔ سکولم ، ریاضیدان نروژی، ثابت شد .

وقتی که‌می‌خواهیم، تنها بادستگاه اصل موضوعهای رشتهٔ طبیعی عددها وردیف عادی‌آنها، سروکارداشته باشیم، اجباراًتنظیمهای‌دیگری هم، که پیچیده‌تراز این دنبالهٔ عددی است، دردستگاه اصل موضوعها ، وارد می‌شود، وبه هیچوجه نمی‌توان‌آنها را، از تنظیم «طبیعی»نخستین جداکرد.

هروقت‌که می‌خواهیم خودرا به‌دستگاه اصل موضوعهای‌مشخصی محدودکنیم، که مثلاً مربوط‌به‌مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد، همیشه ، مجموعهٔ ناخواندهٔ‌دیگری‌هم پیدامی‌شودکه‌باشرطهای همهٔ‌اصل‌موضوعها، تطبیق می‌کند.

مساله‌ها وحکمهایی که حل‌آنها، به کمک وسیله‌های مشخص، ممکن نیست

این موضوع که دستگاه اصل موضوعها، همیشه باید چیزی رااز دست بدهد، باکشف‌نامنتظرهٔ گودل، روشن شد. معلوم شدکه‌درهردستگاه اصل موضوعی مربوط به‌حساب عددهای طبیعی ، مساله‌هایی وجوددارد



که قابل حل نیستند.

معنای این سخن چیست؟

در ریاضیات، مساله‌های قدیمی بسیاری وجوددارد، که به طور جزئی یاکلی، تا کنون حل نشده است. بابعضی از این مساله‌ها، دراین کتاب آشنا شده‌ایم ، مثل مسالهٔ وجود مجموعهٔ نامتناهی زوج عددهای اول همسایه (مثلاً ۱۱و۱۳ یا ۲۹ و ۳۱یا ۱۰۱ و۱۰۳) ، مسالهٔدیگری که تا آخر حل نشده است، فرضیهٔ گلدباخ است. به‌این تساویها،توجه کنید:

$$۴=۲+۲; \qquad ۶=۳+۳;$$

$$۸=۳+۵; \qquad ۱۰=۳+۷=۵+۵;$$

....

این فکر پیش می‌آید، که هر عدد زوج را، به استثنای ۲ ، می‌توان بـه

به‌صورت مجموع دوعدد اول، وگاهی به‌چند طریق، نوشت. در مورد هر عددزوج مشخص، این حکم درست ازآب درمی‌آید. باوجود این ، حکم کلی این فرضیه که : هرعدد دلخواه زوج را می‌توان به مجموع دو عدد اول تبدیل کرد، نه‌ثابت شده است ونه رد.

یکی دیگراز مساله‌های مشهور وحل نشده، فرضیهٔ فرما است (که آنرا «قضیهٔ بزرگ فرما» هم می‌گویند). می‌دانیم که

$$۳^۲+۴^۲=۹+۱۶=۲۵=۵^۲$$

یعنی

$$۳^۲+۴^۲=۵^۲$$

نمونه‌های بسیار دیگری هم از عددهای درست سه‌گانه وجوددارد ، به نحوی که مجموع مجذورهای دوتا از آنها ، با مجذور عدد سوم، برابر باشد.

فرما، ریاضیدان فرانسوی، ضمن مطالعهٔ کتابی، درحاشیهٔ‌آن‌نوشت که‌ثابت کرده است این‌حکم، برای توانهای بالاتـراز ۲ ، صادق نیست ولی‌برای نوشتن روش اثبات‌خود، دراین حاشیه، جاندارد. به‌این‌ترتیب، فرما، این حکم را بیان می‌کند که نمی‌تـوان سه عـدد درست x،y وz را طوری پیداکرد که در این تساوی صدق کنند:

$$x^3+y^3=z^3 \text{ یا } x^4+y^4=z^4 \text{ یا } x^5+y^5=z^5 \text{ ، } \ldots$$

مدتهاست که‌فرما درگذشته‌است. بسیاری ازریاضیدانان کوشیده‌اند تا روش اثبات او را پیدا کنند، ولی، هیچکدام از آنها، توفیقی بدست نیاورده‌اند. این‌عدم توفیق در پیداکردن اثباتی که ظاهراً دراختیار فرما بوده‌است، بسیاری از ریاضیدانان را مجذوب این مساله‌کـرد، اگـرچه

خود مساله، خیلی مهم وجالب‌توجه‌نیست. حتی دریك وصیتنامه، مبلغ گزافی، به‌عنوان جایزه برای‌کسی‌که بتواند این مساله را حل‌کند، معین شده است. خیلی خوب می‌توان مجسم‌کرد که وجود یك جایزهٔ بزرگ، تاچه حدحتی‌مردم‌ناشی را،برای‌حل‌این مساله‌تحریك می‌کرد. خوشبختانه امروز این‌کشش ازبین رفته است، زیرا بعد از پیش آمـدن چند بحران جهانی، وصیتنامه، به‌کلی ارزش خود را ازدست داده است.

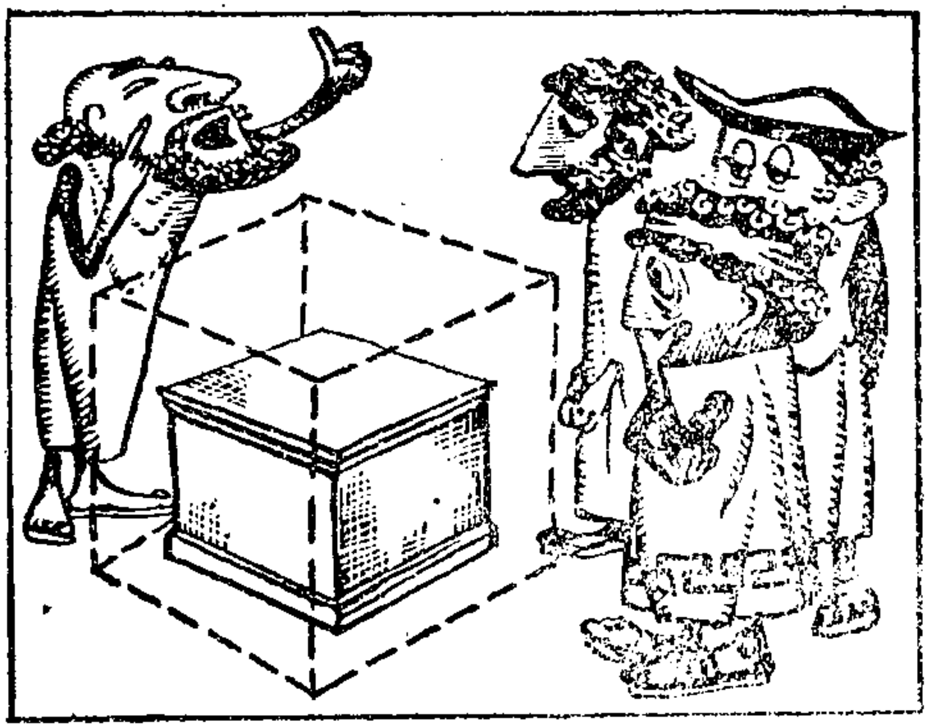
با وجود همهٔ اینها، مسالهٔ فرما،برای ریاضیات، پدیدهٔ ثمربخشی بود. برای حل این مساله ، عنصرهای ایده‌آلی تازه‌ای‌را وارد ریاضیات کردند (آنها را ایده‌آلها نام گذاشتند)،که بعدها برای پیشرفت‌مهمترین شاخه‌هـای جبر، بسیار سودمند افتاد. ولی ، حتی بـه‌یاری آنهاهم تنها توانستند درستی فرضیهٔ فرما رابرای نماهای جداگانه، ویا گروههایی از نماها، ثابت کنند. وحالت کلی آن، همچنان حل‌نشده‌باقی ماند.احتمال دارد که فرما اشتباه‌کرده باشد ؛ گمان می‌رود کـه او تنها برای بعضی حالتهای خاص، اثبات را پیدا کرده است.

درریـاضیات، مساله‌هایی هم وجود دارد، کـه اگر بخواهیم از روشهای معینی‌استفاده‌کنیم، قابل حل‌نیستند. اینها، از جملهٔ مساله‌های حل شده هستند، منتهی به مفهوم منفی آن، یعنی ثابت شده‌است که‌تنها با این روشها ، حل نمی‌شوند.

ازاین‌نوع مساله‌ها، مثلاً می‌توان ازتربیع دایره وحل‌کلی‌معادلهٔ درجه پنجم نام برد . مسالهٔ تثلیث زاویه (یعنی تقسیم زاویه، بـه سه قسمت برابر) وتضعیف مکعب هم، مربوط به همین مقوله‌اند. ثابت شده است که این مساله‌ها را نمی‌توان، تنها با به‌کارگرفتن پرگاروخط‌کش،

حل کرد. به کمك پرگار وخط کش، می‌توان زاویه را به‌دوقسمت برابر، تقسیم کرد، ولی، به سه قسمت برابر نمی توان.

تضعیف (دوبرابرکردن) مکعب را می‌توان حالت فضایی دوبرابر کردن مساحت استخر مربعی دانست. روی صفحه می‌توانیم، بـه کمك پرگاروخط کش، ضلع‌مربعی راکه مساحتش دوبرابرمساحت مربع‌مفروض است بسازیم؛ ولی در فضا، نمی‌توانیم بـاهمین وسیله‌ها ، ضلع مکعبی را بسازیم که‌حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروض باشد. به‌این مساله، «مسالهٔ دیلوس» هم می‌گویند:



بنابرافسانه‌ای، خدایان‌ازمردم جزیره دیلوس خواستند تـامحرابی را که به‌شکل مکعب‌بود، دوبرابر کنند. ولی، تمام تلاش اهالی ، برای اجرای‌دستور، بیهودبود .آنوقت، افلاطون مردم‌غمزدهٔ دیلوس راتسکین داد وگفت: روشن است که قصد خدایان از این فرمان ، تنها این بوده

است که دیلوسیها را به هندسه، علاقمند سازند.

با وجود این، در قضیهٔ گودل، نه گفتگو از مساله‌هایی است که حل نمی‌شوند ونه ازمساله‌هایی که به مفهوم منفی حل شده‌اند. درآنجا، صحبت برسرمساله‌هایی است که با استفاده از دستگاه اصل موضوعی، قابل حل نیستند.

دراینجا، طرحی‌تقریبی ومقدماتی ازآنچه‌که موردنظر گودل‌است، می‌دهیم.

فرض می‌کنیم که دستگاه اصل موضوعی کاملی دربارهٔ دانش مربوط به عددهای طبیعی، برای حساب، در اختیار ما باشد. در اصل موضوعها، همهٔ آنچه که برای این شاخه لازم است، وجوددارد و حتی به این نکته هم توجه شده است که در دستگاه اصل موضوعها، هیچگونه تناقضی وجود ندارد. ضمناً فرض می‌کنیم که‌این‌دستگاه‌را به زبان‌منطق علامتی نوشته باشیم، یعنی همهٔ گزاره‌هایی که دردستگاه وجوددارد،به صورت دنباله‌ای از علامتها، درآمده باشد.

هرکدام از این دنبالهٔ علامتها را می‌توانیم باعددی متناظر کنیم، همانطورکه به‌موقع خود، هرنقطه از صفحه را، بایك زوج عدد، متناظر کردیم. این‌کار را، به این ترتیب می‌توان انجام داد:

تعدادعلامتهای ریاضی ومنطقی محدود است،آنها را با نخستین عددهای اول، متناظرمی‌کنیم (واحد راهم،عدد اول به‌حساب‌می‌آوریم.) حالا، مثلاً فرض‌کنیدکه علامت ۱ را برای عدد ۱ انتخاب کنیم (لازم نیست که‌برای عددهای دیگر، علامتی در نظربگیریم، زیرا، عدد ۲ رامی توان به‌صورت ۱+۱، عدد ۳ را به‌صورت ۱+۱+۱ وغیره نوشت).

علامت «=» را متناظر با عدد ۲؛ علامت «Γ»، به معنای «نه» را متناظر باعدد ۳؛ علامت «+» را متناظر با ۵ بگیریم وغیره (انتخاب توالی عددها، هیچ نقشی ندارد). فرض کنیم که آخرین علامت، متناظر با عدد ۱۸ باشد. آنوقت عددهای اولی راکه از ۱۹ شروع می‌شود ، با حرفهای x، y، ... متناظرمی‌کنیم، که برای گزاره‌های دستگاه‌ما، مقادیری مجهول فرض کنید، x با عدد ۱۹؛ y با عدد ۲۳ وغیره، متناظر باشد. به این ترتیب، این واژه‌نامه رابدست می‌آوریم:

۱ .... ۱
۲ .... =
۳ .... Γ
۵ .... +
....
۱۹ x
۲۳ .... y
....

از اینجا، بلافاصله می‌توان فهمید که‌رابطهٔ

۱ = ۱

متناظر با سه عدد زیر می‌شود:

۱، ۲، ۱

من می‌خواهم ازاین سه‌عدد، یك عدد بدست‌آورم. روشن است‌که این کار را به‌سادگی وبه طریقه‌های متفاوت، می‌توان انجام داد . اگر ، مثلاً، این سه عدد را جمع کنم، به‌عدد ۴ می‌رسم. ولی ، از این عدد ۴، چگونه می‌توان به عددهای نخستین رسید؟ از این عدد، مطلقاً نمی‌توان فهمیدکه ازکدام عددها، وبه چه طریقی وبا چه ردیفی بدست آمده است

عدد۴رامی‌توان مثلاً به‌صورت ۳+۱ یا ۱+۳،یا ۲+۲،یا۲+۱+۱، یا ۱+۱+۲ نوشت‌و ۱+۲+۱، تنها یکی از حالتهای ممکن‌آنست. ولی، من می‌خواهم عددی را بدست‌آورم‌که ازروی‌آن بتوانم بلافاصله، عددهای تشکیل دهندهٔ آنرا تشخیص دهم . واین، موضوعی عملی است. مثلاً،می‌توانیم‌ابتدا سه عدد اول درنظر بگیریم (وبه خصوص عدد اول، نه هرعدد دلخواه):

۲ و ۳ و ۵

وسه عدد مورد نظر خود

۱ و ۲ و ۱

رابه‌عنوان نماهای آنها در نظربگیریم . سه عددی را که با این توانها انتخاب کـرده‌ایم ، پشت سرهم می‌نویسیم وعمل ضرب را در بارهٔ آنها انجام می‌دهیم، بدست‌می‌آید:

$$۲^{۱} . ۳^{۲} . ۵^{۱} = ۱۰ \times ۳^{۲} = ۱۰ \times ۹ = ۹۰$$

به این ترتیب، رابطهٔ ۱ = ۱، متناظر با عدد ۹۰ می‌شود.

از روی این عدد، به سادگی می‌توان دستور یا رابطهٔ متناظرآنرا پیدا کرد.کافی است، این عدد را به‌ضرب عاملهای اول تجزیه‌کنیم‌وبه ترتیب صعودی بنویسیم:

$$۹۰ = ۲ \times ۴۵ = ۲ \times ۳ \times ۱۵ = ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۵ =$$
$$= ۲^{۱} . ۳^{۲} . ۵^{۱}$$

نماها، دوباره عددهایی اول هستند

۱ و ۲ و ۱

که با مراجعهٔ به واژه نامه، متناظر می‌شود باعلامتهای

$$۱ز = ۱ز$$

وبه این ترتیب، ازعدد ۹۰، بدون اشتباه، به رابطهٔ متناظر آن‌می‌رسیم:

$$۱ = ۱$$

به همین ترتیب هرگزارهٔ دستگاه، باعددی متناظر می‌شود. باهمین‌روش می‌توان، هر اثباتی را هم متناظر با عددی کرد. از نظر صوری ، اثبات چیزی جز دنباله‌ای از گزاره‌ها نیست (که درآن ، هرگزاره نتیجه‌ای از گزارهٔ قبلی است). ولی ما ،هرگزاره را متناظرباعددی‌کرده‌ایم. بنابراین مثلاً، اثباتی‌که ازسه‌گزاره درست شده است، متناظر باسه عدد می‌شود. بیان‌این سه عددرا هم، کاملاً مثل سابق، می‌توانیم به یك عددمنجر کنیم، که ازآن درهرلحظه‌ای که بخواهیم، می‌توان با تجزیهٔ به عاملهای اول، به اجزاء نخستین، دست‌یافت.

حالا، فرض می‌کنیم‌که عدد بسیار بزرگ وترسناکی رو به روی ما باشدکه متناظر باگزاره‌ای است. وسپس ، فرض می‌کنیم‌که ما دارای حوصله‌ای خدایی‌باشیم‌که به‌ما امکان دهد، این عدد را به عاملهای اول خود تجزیه کنیم ودر نتیجه بدست آوریم:

$$۲^{۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰} \times ۳^{۹۰}$$

بلافاصله دیده می‌شودکه این‌نماها، عددهایی اول نیستند. از اینجامعلوم می‌شودکه‌عدد ما ، متناظر بایك‌گزارهٔ جداگانه نیست، بلکه متناظربایك اثبات است.اثبات طوری‌است‌که درآن‌ازگزاره‌های دوگانه‌ای که‌متناظر باعددهای‌مربوط‌به‌نماهاست، استفاده شده است) یعنی عددهای

۹۰ و ۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

اگر این عددها را، به‌عاملهای اول خود تجزیه کنیم، می‌توانیم

گزاره‌های‌متناظر آنها را پیدا کنیم. نخستین عدد، که شامل نوزده صفر است، چنین می‌شود:

$$۹ \times ۱۰^{۱۹} = ۳^{۲} \times ۱۰^{۱۹} = ۳^{۲} \times ۲^{۱۹} \times ۵^{۱۹}$$

که اگر آنرا برحسب مقادیر پایه‌ها، مرتب کنیم، می‌شود:

$$۲^{۱۹} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۱۹}$$

ونماها، از سه عدد تشکیل شده است:

۱۹ ، ۲ ، ۱۹

باتجزیهٔ عدد دوم به عاملهای اول ، بدست می‌آید:

$$۹۰ = ۲^{۱} \cdot ۳^{۲} \cdot ۵^{۱}$$

وبه این ترتیب، این عدد هم، شامل سه عدد است:

۱ ، ۲ ، ۱

به‌سراغ واژه نامه می‌رویم:

۱۹ .... x ؛ ....۲ = ؛ ازآنجا می‌توان‌فهمیدکه سه‌عددنخست، یعنی ۱۹،۲،۱۹، متناظر با این رابطه‌است:

$$x = x$$

۱....۱؛ ۲.... = ؛ ودر نتیجه، سه عدد دوم، یعنی ۱، ۲ ، ۱ ، متناظر است با رابطهٔ

$$۱ = ۱$$

به این ترتیب،تمامی اثباتی‌که متناظر با این عدد «حیرت‌انگیز» است، چنین است.

اگر برای هر x داشته باشیم:

$$x = x$$

درآنصورت، خواهیم داشت:

$$۱ = ۱$$

این، یك استدلال بسیار کوچك وناچیز بود ، ولی متناظر با یك

عدد نجومی شد؛ ومی‌توانید پیش خودتصور کنید که‌اگر با استدلالهای جدیتری سروکارداشته باشیم، باچگونه عدد عظیمی مواجه خواهیم شد. ولی، برای ما این مطلب اهمیت داردکه هرحالت متناظر بایك عدداست وبا شروع ازاین عدد، می‌توان اثبات راکشف‌کرد (دست‌کم ، از لحاظ نظری، زیرا درعمل نمی‌توان ازآن استفاده‌کرد).

به این ترتیب، دستورها و اثباتها را می‌توان به صورت عددهای طبیعی نوشت. ولی، از این راه، چه چیزی عاید ما می‌شود؟

فوق ریاضیات ، دستگاه را از بیرون مورد بررسی قرار می‌دهد؛ قضیه‌های آن، آنچه راکه به ساختمان رابطه‌ها و اثباتها مربوط می‌شود، باروش خاص خود، بیان می‌کند. این قضیه‌ها را،می‌توان به‌کمك‌واژه‌نامه‌ای‌که دردست‌داریم،به عددهای‌طبیعی، وسپس‌تجزیهٔ‌آنها به‌عاملهای اول، تبدیل کرد. نمونه‌ای را بررسی می‌کنیم.

فوق‌ریاضیات،ضمن مطالعهٔ‌رابطه‌هایی که‌به‌کمك‌علامتهای‌دستگاه نوشته شده‌اند، ممکن است به این نتیجه برسد که با رابطه‌های

$$\Gamma(۱=۱) \quad \text{و} \quad ۱=۱$$

باید بااحتیاط رفتارکرد، زیرا وجود یکی از آنها، به‌معنای نفی‌دیگری است. ما قبلاً دیدیم که رابطهٔ

$$۱=۱$$

متناظر است باعدد

$$۲^{۱}.۳^{۲}.۵^{۱}=۹۰$$

به واژه‌نامه مراجعه می‌کنیم (ما در اینجا،پرانتزها را درنظرنگرفته‌ایم، ولی، در واقع، پرانتزهم یك‌علامت است و باید آنرا متناظر با یك عدد درنظر گرفت)، می‌بینیم که

Γ....۳، =....۲، ۱....۱؛ وبنابراین‌رابطهٔ (۱=۱)Γ متناظر با این چهار عددمی‌شود:

۳، ۱، ۲، ۱

که درنتیجه ـ باتوجه به اینکه چهار عدد اول نخستین ۲ ، ۳ ، ۵و۷ هستند ـ این عدد پیدا می‌شود:

$$۲^{۳} . ۳^{۱} . ۵^{۲} . ۷^{۱}$$

این عدد را محاسبه می‌کنیم:

$$۲^{۳} . ۳^{۱} . ۵^{۲} . ۷^{۱} = ۸ \times ۳ \times ۲۵ \times ۷ = ۴۲۰۰$$

اگر دو عدد را با هم مقایسه کنیم:

$$۹۰ = ۲^{۱} . ۳^{۲} . ۵^{۱}$$
$$۴۲۰۰ = ۲^{۳} . ۳^{۱} . ۵^{۲} . ۷^{۱}$$

معلوم می‌شود که این قضیهٔ فوق ریاضیات را، که می‌گوید: «هرکدام‌از رابطه‌های

$$\Gamma(۱=۱) \text{ یا } ۱=۱$$

دیگری‌را نفی می‌کند»، می‌توان به‌وسیلهٔ این گزاره بیان‌کرد: «عددهای ۹۰ و ۴۲۰۰ دارای این خاصیت‌اند که تجزیهٔ عدد دوم به عاملهای‌اول با $۲^{۳}$ آغاز می‌شود، آنوقت نماهای عددهای اول بعدی، به‌ترتیب برابر است با نماهای تجزیهٔ عدد اول، یعنی ۹۰، به عاملهای اول».

درجملهٔ اخیر، ردپایی از فوق ریاضیات، وجودندارد ؛ این یك بیان خالص حسابی است. ولی، دستگاه مورد بررسی برای همین منظور بود که درآن، بیان حسابی را تنظیم‌کند. وبه همین مناسبت ، این بیان حسابی را، می‌توان به‌کمك‌علامتهای دستگاه مورد بررسی‌ما ، و بـدون استفاده ازواژه‌ها، نوشت. دراینصورت، به یك‌دنبالهٔ عادی علامتهاتبدیل

می‌شودوکسی متوجه معنای دوگانهٔآن نخواهد شد. باوجود این،دارای دومعنی است. درآن، دومتن‌متفاوت را می‌توان خواند . اول،متن‌حسابی که به‌مفهوم ابتدایی علامتها، در هررابطهٔ دستگاه دیده می‌شود . دوم، متن بیان فوق ریاضی‌که درزیر پوششی از بیان حسابی قرارگرفته‌است.

درست درمورد دوگانگی دنبالهٔ علامتها وعددهای متناظر باآنها بودکه گودل به عدد هشت میلیارد برخورد کرد (در واقع، مامی‌دانیم‌که این عدد از عاملهای اول تشکیل شده است وبرای محاسبه باچنین‌عددی زندگی آدمی‌کفایت نمی‌کند)؛ و گودل‌کشف کرد که این عدد ، دارای خاصیت زیراست: اگر مثل حالتهای قبل ، به‌کمك علامتهای دستگاه ، حکم ریاضی زیر را بنویسیم:

«رابطه‌ای راکه متناظرباعدد هشت‌میلیارد باشد،نمی‌توان دردستگاه ثابت‌کرد»، وبه دنبال این برویم که، بااستفاده ازواژهٔ نامهٔ خود، چه عددی متناظر با این حکم است، باکمال تعجب‌کشف می‌کنیم‌که این عدد، همان‌هشت میلیارد است! به این ترتیب، «رابطه‌ای که متناظر باعدد هشت‌میلیارد است»، خود همین رابطه مربوط به حکم بالاست، که در واقع به‌معنای اینست که: «من خودم را نمی‌توانم ثابت‌کنم»

متوجه هستید که‌این تنها بازی باواژه‌ها نیست . ما با رابطه‌ای سروکار داریم‌که هیچ تفاوتی با رابطه‌های دیگر ندارد.

ولی، هیچ تعجبی نداردکه این رابطه ، دردستگاه غیر قابل حل باشد. اگربپذیریم‌که عدد«هشت میلیارد» متناظراست باحکم: «رابطه‌ای که متناظر باهشت میلیارد باشد، نمی‌توان در دستگاه ثابت کرد»، دچار تناقض‌می‌شویم،زیراخوداین‌رابطه،از قابل اثبات‌نبودن، صحبت‌می‌کند.

واگرآنرا ردکنیم،چنین ردی درعین حال تأیید درستی این‌گزاره

ریاضی‌است که‌می گوید: رابطه‌رانمی‌شود ثابت کرد. وبنابراین،ردرابطه، درعین حال به معنای درستی آنست.

به این ترتیب، این رابطه را، نه می‌توان ثابت‌کرد ونه می‌توان ردکرد. این رابطه، غیرقابل حل است.

مساله‌هایی که قابل حل نیستند

من دوباره تاکید می کنم که اگر به واژه‌نامه مراجعه نشود، این دنبالهٔ علامتها نمی‌توانند چیزی را نشان بدهند، چنین دنباله‌ای به‌طور عادی، گزارهٔ معصومی است دربارهٔ جمع و ضرب . گودل ثابت کرد که وجود مساله‌های غیرقابل‌حل، در محتوی هردستگاهی وجود دارد.مثلاً، مسالهٔ گلدباخ (که قبلاً از آن یادکردیم)، از اینگونه است. وبنابراین، چه بسا که نتوانند آنرا حل کنند. ممکن است که اگر، با امکاناتی که داریم، برای نزدیك شدن‌به این فرضیه ، دستگاه صوری اصل موضوعها راتشکیل دهیم ، بیان صوری فرضیهٔ گلد باخ،به‌صورت رابطه‌ای درآید که به زبان واژه نامهٔمابگوید: «من‌نمی‌توانم درداخل دستگاه، حل شوم» دربارهٔ همهٔ مساله‌هایی هم‌که تا به امروز حل نشده‌اند ، به همین ترتیب می‌توان داوری کرد. ممکن است اعتراض شود کـه همهٔ اینها ناشی از نارسایی دستگاههای اصل موضوعی است، شاید، اگر خود را محدودبه دستگاه اصل موضوعی خاصی نکنیم، بتوان مساله‌هایی راکه گودل،خط قرمز روی آنها کشیده است، حل‌کرد. ولی، درواقع، اینطور نیست. آلونزدچرچ، مساله‌ای را تنظیم‌کرده است که نمی‌توان‌آنـرا با هیچکدام از امکانات ریاضی که امروز دردست داریم، حل‌کرد؛ و ایـن قابل حل نبودن، مطلقاً بـه ایـن مربوط نیست کـه قضاوت خودرا در چارچوب دستگاههای اصل موضوعی، محدود کنیم ویا برپایهٔ دیگری قراردهیم .

متاسفانه، ناچاریم که دراینجا، نقطهٔ پایان را بگذاریم. ما دیگر به مرزهای اندیشهٔ ریاضی معاصر رسیده‌ایم. زمان ما ، زمان بیداری و پیشرفت آگاهیهاست؛ ودر این میان، ریاضیات هم، نقش خود را بازی می‌کند و خود به‌بررسی وکشف همهٔ مرزهای‌توانایی خود پرداخته‌است.

باوجوداین،آیاحق داریم بگوییم‌که ما به‌مرزهای پایان‌رسیده‌ایم وسدی عبور ناپذیر دربرابرمان قدبرافراشته است؟ تاریخ ریاضیات‌نشان داده است که‌همیشه راهی به‌فراسوی‌بن‌بست پیدا می‌شود. استدلال چرچ، در واقع، یك لحظهٔ تاریخی‌بسیار مهمی را، به وجود آورده است. چرچ تاکید می‌کندکه او «از همهٔ‌تواناییهای ریاضیاتی، که امروز دردسترس ماست»، گفتگومی‌کند. وتنها بـا ایـن تاکید است کـه می‌توان دربارهٔ روشهای ریاضی امروز، صحبت کـرد . وقتی کـه مفهوم یا پدیده‌ای را تنظیم می‌کنیم، خودبه‌خود به معنای اینست که آنرا در تنگنایی قـرار داده‌ایم وبه‌نحوی محدود کرده‌ایم. وهرحصار ومانعی،ایجاد زحمت‌می‌کند.مساله‌های «غیرقابل‌حل»هم‌دربرابر این حصار، نمی‌ایستندوسرانجام راهی به‌بیرون پیدا می‌کنند.

بدون تردید، پیشرفت آیندهٔ ریاضیات، دامنهٔ آنرا وسعت خواهد داد، اگر چه دورنمای این پیشرفت،از دیـد امروزما، پنهان است. یـك چیز را باید یکبار برای‌همیشه بفهمیم: ریاضیات، پدیده‌ای ساکن وبسته نیست، ریاضیات، دانشی زنده و پرتحرك است که دائماً راه خود را به طرف‌جلومی‌گشاید.هروقت‌که خواسته‌اند ریاضیات‌را در درون محدودهٔ بسته‌ای، محبوس کنند ، دیر یازود توانسته است راهی به سوی آزادی بجوید و قابلیت زنده بودن خود را نشان دهد.

۵

خانم روزا پتر، دانشمند مجار، دکتر در علوم ریاضی، برندهٔ جایزهٔ کوشوت [به نام لایوش کوشوت (۱۸۰۲–۱۸۹۴)، مرد سیاسی و دولتی مجار] و استاد دانشگاه بوداپست، تاکنون کتابها و مقاله‌های علمی زیادی نوشته است. او فعالانه در بوجود آمدن رشتهٔ مهمی از ریاضیات معاصر ـ نظریهٔ تابعهای برگشتی ـ شرکت کرد و در سال ۱۹۵۱، نخستین بررسی دقیق این موضوع را، طی مقاله‌ای نوشت که نخستین مقاله از این نوع، در تاریخ علم بود.

روزا پتر، همیشه کار علمی را با فعالیت آموزشی همراه کرده است. روزا پتر، به جز آثاری که در زمینهٔ کتابهای درسی ریاضیات عالی دارد، همراه با دیگر ریاضیدانان بزرگ جمهوری خلق مجارستان، تلاشهای زیادی برای بهتر کردن روشهای آموزش ریاضی، در مدرسه‌های مجارستان کرده است.

کتاب « بازی با بینهایت » ، تنها یک رسالهٔ درخشان دربارهٔ قضیه‌ها و روشهای ریاضی نیست، بلکه نشانه‌ای از دلاوری واقعی روزا پتر است. او این کتاب را در دوران خودکامگی فاشیستی نوشت و با سلاح دانش، به خاطر ایده‌آلهای انسانی و به خاطر پیروزی عقل انسانی، مبارزه می‌کرد.

۴۹۰ ریال